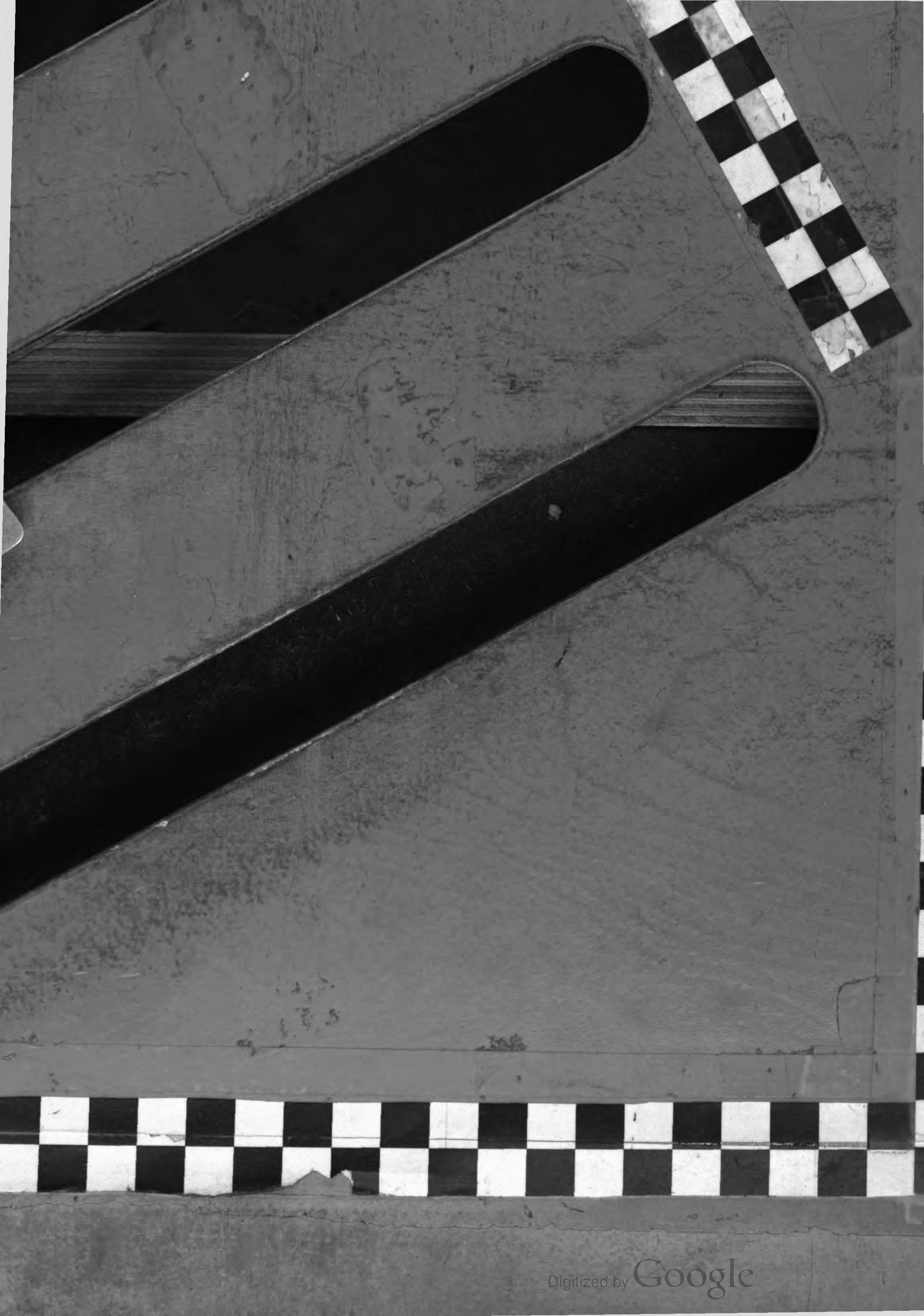




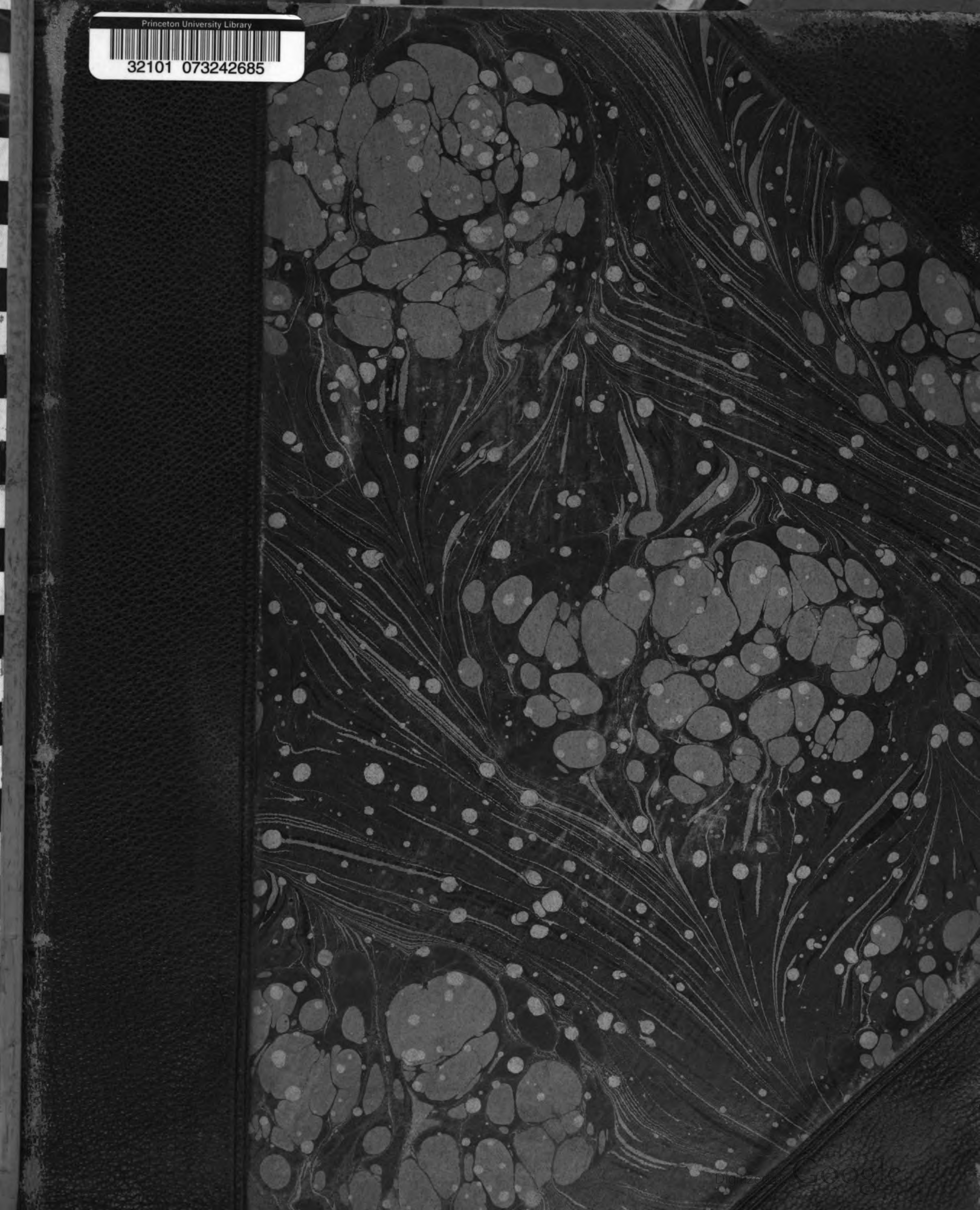



MÉMOIRES
COURONNÉS
PUBLIÉS PAR
TOME
LI

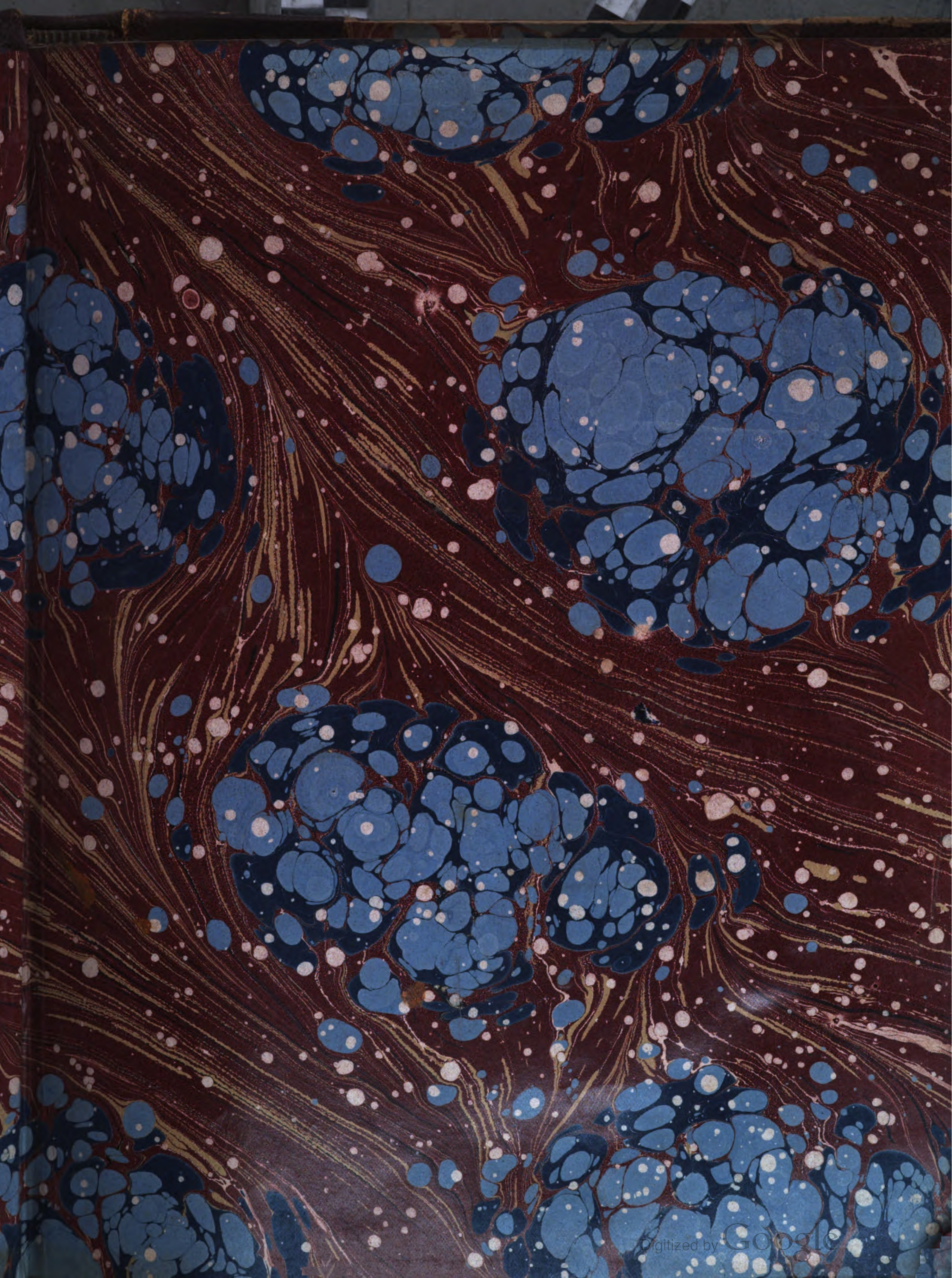







Princeton University Library
32101 073242685


Elizabeth Foundation,
LIBRARY
OF THE
College of New Jersey.



MÉMOIRES COURONNÉS

ET

MÉMOIRES DES SAVANTS ÉTRANGERS

PUBLIÉS PAR

L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

MÉMOIRES COURONNÉS

ET

MÉMOIRES DES SAVANTS ÉTRANGERS

PUBLIÉS PAR

L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

TOME LI.



BRUXELLES,

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

rue de Louvain, 108

1889

TABLE

DES

MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME LI.

CLASSE DES SCIENCES.

SUR
L'INFLUENCE DU FROTTEMENT
ET DES
ACTIONS MUTUELLES INTÉRIEURES
DANS
LES MOUVEMENTS PERIODIQUES D'UN SYSTÈME

APPLICATION AU SPHÉROÏDE TERRESTRE

PAR

E. RONKAR,
INGÉNIEUR HONORAIRE DES MINES,
DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES,
CHARGÉ DE COURS A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 7 janvier 1888.)

SUR

L'INFLUENCE DU FROTTEMENT

ET DES

ACTIONS MUTUELLES INTÉRIEURES

DANS

LES MOUVEMENTS PÉRIODIQUES D'UN SYSTÈME

APPLICATION AU SPHÉROÏDE TERRESTRE

---

§ I. — Sur l'effet du frottement intérieur.

Considérons d'abord le mouvement de deux points matériels libres $m(x, y, z)$ et m' $x', y', z')$, soumis chacun à l'action d'une force de nature périodique ainsi qu'à celle d'un frottement dont la grandeur dépend de leur vitesse relative. Admettons, par exemple, que ce frottement est proportionnel, pour chacun des points, à la vitesse relative de l'autre, et que la force qu'il exerce est dirigée suivant cette dernière vitesse. D'après cela, la force de frottement f qui agit sur le point m aura pour composantes suivant les axes :

$$f_x = \lambda\left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt}\right),$$

$$f_y = \lambda\left(\frac{dy'}{dt} - \frac{dy}{dt}\right),$$

$$f_z = \lambda\left(\frac{dz'}{dt} - \frac{dz}{dt}\right),$$

λ étant une constante positive.

Les composantes de la force de frottement qui agit sur m' seront :

$$f_{x'} = -f_x, \quad f_{y'} = -f_y, \quad f_{z'} = -f_z.$$

Pour généraliser un peu la question, nous pouvons prendre :

$$f_x = \alpha\left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt}\right),$$

$$f_y = \beta\left(\frac{dy'}{dt} - \frac{dy}{dt}\right),$$

$$f_z = \gamma\left(\frac{dz'}{dt} - \frac{dz}{dt}\right).$$

Soient maintenant F_x, F_y, F_z, les composantes de la force périodique agissant sur m, et $F_{x'}$, $F_{y'}$, $F_{z'}$ celles de la force périodique qui agit sur m' ; nous aurons :

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + f_x \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + f_y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + f_z \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} m'\frac{d^2x'}{dt^2} &= F_{x'} + f_{x'} \\ m'\frac{d^2y'}{dt^2} &= F_{y'} + f_{y'} \\ m'\frac{d^2z'}{dt^2} &= F_{z'} + f_{z'} \end{aligned}\right\}.$$

Nous voyons tout de suite, en nous reportant aux expressions des forces f, qu'il suffit d'examiner simultanément les premières équations de ces deux groupes qui sont relatives à la direction x; ce que nous en déduirons pourra s'appliquer aux directions des y et des z, en tenant compte des valeurs particulières des constantes, qui peuvent différer pour les trois directions coordonnées.

Posons :

$$F_x = \sum a \cos\frac{2\pi(t-\lambda)}{T}; \qquad F_{x'} = \sum a' \cos\frac{2\pi(t-\lambda')}{T'};$$

il vient :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum a \cos\frac{2\pi(t-\lambda)}{T} + \alpha\left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt}\right),$$

$$m'\frac{d^2x'}{dt^2} = \sum a' \cos\frac{2\pi(t-\lambda')}{T'} + \alpha\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right).$$

Il s'agit d'intégrer ces équations.

En les ajoutant membre à membre et intégrant, il vient :

$$(1) \quad . \quad . \; m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} = \frac{1}{2\pi}\sum a\mathrm{T}\sin\frac{2\pi(t-\lambda)}{\mathrm{T}} + \frac{1}{2\pi}\sum a'\mathrm{T}'\sin\frac{2\pi(t-\lambda')}{\mathrm{T}'} + \mathrm{A},$$

A étant une constante.

En divisant respectivement par m et m' les deux équations et les retranchant l'une de l'autre, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}-\frac{dx}{dt}\right) + \alpha\left(\frac{1}{m'}+\frac{1}{m}\right)\left(\frac{dx'}{dt}-\frac{dx}{dt}\right) = \sum\frac{a'}{m'}\cos\frac{2\pi(t-\lambda')}{\mathrm{T}'} - \sum\frac{a}{m}\cos\frac{2\pi(t-\lambda)}{\mathrm{T}}.$$

Remarquant que le facteur d'intégration est :

$$e^{\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t},$$

nous aurons :

$$\left(\frac{dx'}{dt}-\frac{dx}{dt}\right)e^{\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t} = \sum\frac{a'}{m'}\int\cos\frac{2\pi(t-\lambda')}{\mathrm{T}'}e^{\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t}dt$$
$$-\sum\frac{a}{m}\int\cos\frac{2\pi(t-\lambda)}{\mathrm{T}}e^{\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t}dt + \mathrm{A}',$$

A′ étant une constante.

Or on a en général :

$$\int e^{qt}\cos nt.dt = \frac{1}{n}e^{qt}\frac{\sin nt + \frac{q}{n}\cos nt}{1+\frac{q^2}{n^2}}.$$

Par suite, on a :

$$(2) \quad . \quad . \; \frac{dx'}{dt}-\frac{dx}{dt} = \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{m'}\sum a'\frac{\mathrm{T}'}{2\pi}\frac{\sin 2\pi\frac{t-\lambda'}{\mathrm{T}'} + \frac{\mathrm{T}'}{2\pi}\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\cos 2\pi\frac{t-\lambda'}{\mathrm{T}'}}{1+\left(\frac{\mathrm{T}'}{2\pi}\right)^2\alpha^2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)^2} \\ &-\frac{1}{m}\sum a\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\frac{\sin 2\pi\frac{t-\lambda}{\mathrm{T}} + \frac{\mathrm{T}}{2\pi}\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\cos 2\pi\frac{t-\lambda}{\mathrm{T}}}{1+\left(\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\right)^2\alpha^2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)^2} \\ &+\mathrm{A}'e^{-\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t} \end{aligned}\right.$$

Combinant cette équation avec l'équation (1), on pourra calculer $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dx'}{dt}$.
Pour simplifier les notations, posons :

$$\varepsilon = \frac{T}{2\pi}\alpha\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right); \qquad \varepsilon' = \frac{T'}{2\pi}\alpha\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right).$$

Nous aurons d'abord en calculant $\frac{dx}{dt}$:

$$\left.\begin{aligned}&(m + m')\frac{dx}{dt} + \sum \frac{a'T'}{2\pi}\,\frac{\sin 2\pi\frac{t-\lambda'}{T'} + \varepsilon' \cos 2\pi \frac{t-\lambda'}{T'}}{1+\varepsilon'^2} \\ &- \frac{m'}{m}\sum\frac{aT}{2\pi}\,\frac{\sin 2\pi\frac{t-\lambda}{T} + \varepsilon\cos 2\pi\frac{t-\lambda}{T}}{1+\varepsilon^2} \\ &+ m'A'e^{-\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t}\end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned}&\sum\frac{a'T'}{2\pi}\sin 2\pi\frac{t-\lambda'}{T'} \\ &+ \sum\frac{aT}{2\pi}\sin 2\pi\frac{t-\lambda}{T} + A.\end{aligned}\right.$$

Si nous groupons les termes de cette équation, il viendra :

$$\begin{aligned}(m + m')\frac{dx}{dt} = &\sum\frac{aT}{2\pi}\left[\left(1 + \frac{m'}{m}\cdot\frac{1}{1+\varepsilon^2}\right)\sin 2\pi\frac{t-\lambda}{T} + \frac{m'}{m}\,\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\cos 2\pi\frac{t-\lambda}{T}\right] \\ &+ \sum\frac{a'T'}{2\pi}\left[\left(1 - \frac{1}{1+\varepsilon'^2}\right)\sin 2\pi\frac{t-\lambda'}{T'} - \frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'^2}\cos 2\pi\frac{t-\lambda'}{T'}\right] \\ &+ A - m'A'e^{-\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t}.\end{aligned}$$

On obtiendrait une expression analogue pour $\frac{dx'}{dt}$.

Nous pouvons distinguer trois parties dans la valeur de $\frac{dx}{dt}$: la première provient de F_x, la deuxième de $F_{x'}$; la troisième ne dépend que du frottement.

Examinons d'abord la première partie que nous désignerons par $\left(\frac{dx}{dt}\right)_1$; nous avons :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = \frac{1}{m+m'}\sum\frac{aT}{2\pi}\left[\left(1 + \frac{m'}{m}\,\frac{1}{1+\varepsilon^2}\right)\sin 2\pi\frac{t-\lambda}{T} + \frac{m'}{m}\,\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\cos 2\pi\frac{t-\lambda}{T}\right].$$

Posons :

$$1 + \frac{m'}{m}\,\frac{1}{1+\varepsilon^2} = \rho\cos\frac{2\pi\mu}{T},$$

$$\frac{m'}{m}\,\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} = \rho\sin\frac{2\pi\mu}{T};$$

il viendra :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = \frac{1}{m+m'} \sum \frac{aT}{2\pi} \rho \sin 2\pi \frac{t-\lambda+\mu}{T}.$$

Différentiant cette expression et multipliant par m, on a :

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_1 = \frac{m}{m+m'} \sum a\rho \cos 2\pi \frac{t-\lambda+\mu}{T}.$$

Comparons le terme de période T de cette expression, savoir :

$$g_1 = a\frac{m}{m+m'}\rho \cos 2\pi \frac{t-\lambda+\mu}{T},$$

avec le terme correspondant de F_x, c'est-à-dire :

$$g = a \cos 2\pi \frac{t-\lambda}{T}.$$

Nous voyons d'abord que dans g_1, l'amplitude de la force est réduite dans le rapport :

$$\theta = \rho \frac{m}{m+m'}.$$

En outre, il y a une variation de phase dans l'action de cette force; l'avance angulaire qui en résulte est $\frac{2\pi\mu}{T}$.

Des équations ci-dessus, on tire d'ailleurs :

$$\rho^2 = 1 + \frac{1}{1+\varepsilon^2}\left[2\frac{m'}{m} + \left(\frac{m'}{m}\right)^2\right],$$

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi\mu}{T} = \frac{\frac{m'}{m}\varepsilon}{1+\varepsilon^2+\frac{m'}{m}},$$

Pour nous faire une idée de la manière dont varient ces quantités, nous ferons quelques hypothèses particulières.

Supposons d'abord que T soit suffisamment petit pour que l'on puisse négliger ε devant l'unité; nous aurons :

$$\rho = 1 + \frac{m'}{m},$$

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{\mu}{T} = \frac{\frac{m'}{m}}{1 + \frac{m'}{m}} \cdot \varepsilon.$$

On conclut de là que la variation de la phase tend vers zéro, à mesure que T diminue.

Ensuite, il vient :

$$\theta = 1.$$

Ainsi donc, à la limite $g_1 = g$.

En d'autres termes, la force g exerce son action sur le point m, comme si ce point était entièrement libre; l'action du frottement exercé par m' disparait.

Supposons maintenant que T croisse, de sorte que ε soit très grand par rapport à $1 + \frac{m'}{m}$; nous aurons :

$$\rho = 1; \quad \theta = \frac{m}{m + m'};$$

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi\mu}{T} = \frac{m'}{m} \frac{1}{\varepsilon}.$$

On voit que la variation de la phase diminue à mesure que T augmente. Ensuite, la valeur de θ indique que, au point de vue de l'action exercée sur m, les choses se passent comme si la force g s'était répartie sur les masses m et m' proportionnellement à ces masses; ou si l'on veut, on peut dire que cette action s'exerce comme si m entrainait m' dans son mouvement.

Entre ces deux cas limites, on a toujours :

$$1 > \rho > \frac{m}{m + m'},$$

ρ décroissant à mesure que T augmente; on peut alors poser :

$$\theta = \frac{m}{m + m'_1}, \quad m'_1 < m'.$$

De sorte qu'au point de vue de l'intensité, l'action de g s'exerce de la même manière que si m entraînait une partie m'_1 de la masse de m'; cette partie entraînée croît avec T.

Quant à la variation de phase dans l'action de g, elle est nulle pour $T = 0$; elle croît d'abord avec T, passe par un maximum pour $\varepsilon^2 = 1 + \frac{m'}{m}$, ce qui donne :

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{\mu}{T} = \frac{\frac{m'}{m}}{2\sqrt{1 + \frac{m'}{m}}},$$

puis elle décroît de nouveau, et s'annule pour $T = \infty$.

Remarquons tout de suite que l'accroissement du coefficient α entraîne les mêmes conséquences que l'accroissement de T; si α est très grand, le mouvement aura toujours à peu près lieu comme si les points m et m' étaient invariablement reliés; au contraire, si α décroît, l'indépendance des mouvements de m et de m' s'accentue, de la même manière que quand T décroît.

Passons maintenant à l'examen de la seconde partie de $\frac{dx}{dt}$; désignons-la par $\left(\frac{dx}{dt}\right)_2$, et nous aurons :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = \frac{1}{m + m'} \sum \frac{a'T'}{2\pi} \frac{\varepsilon'}{1 + \varepsilon'^2} \left[\varepsilon' \sin 2\pi \frac{t - \lambda'}{T'} - \cos 2\pi \frac{t - \lambda'}{T'}\right].$$

Posons :

$$\varepsilon' = \rho' \cos 2\pi \frac{\mu'}{T'}, \quad 1 = \rho' \sin 2\pi \frac{\mu'}{T'};$$

il viendra :

$$\rho' = \sqrt{1 + \varepsilon'^2}, \quad \operatorname{tg} 2\pi \frac{\mu'}{T'} = \frac{1}{\varepsilon'}.$$

Enfin :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = \frac{1}{m + m'} \sum \frac{a'T'}{2\pi} \frac{\varepsilon'}{\sqrt{1 + \varepsilon'^2}} \sin 2\pi \frac{t - \lambda' - \mu'}{T'}.$$

On en déduit :

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_2 = \frac{m}{m+m'}\sum g'\frac{\varepsilon'}{\sqrt{1+\varepsilon'^2}}\cos 2\pi\frac{t-\lambda'-\mu'}{T'}.$$

Comparons encore le terme de période T′ de cette expression, c'est-à-dire :

$$g'_1 = \frac{m}{m+m'}a'\frac{\varepsilon'}{\sqrt{1+\varepsilon'^2}}\cos 2\pi\frac{t-\lambda'-\mu'}{T'},$$

avec le terme correspondant de $F_{x'}$, savoir :

$$g' = a'\cos\frac{2\pi(t-\lambda')}{T'}.$$

Nous constatons encore que le coefficient d'intensité a' de g' est réduit dans le rapport :

$$\theta' = \frac{m}{m+m'}\frac{\varepsilon'}{\sqrt{1+\varepsilon'^2}}.$$

Il y a ensuite un retard angulaire de la phase, représenté par $2\pi\frac{\mu'}{T'}$.

Examinons encore quelques cas particuliers.

Si T′ décroît, il en est de même de ε', et à la limite, on a :

$$\theta' = 0, \quad \operatorname{tg}\frac{2\pi\mu'}{T'} = \infty.$$

Ainsi, dans ce cas, la force g' n'a nulle action sur le mouvement du point m.

Si nous rapprochons ce résultat de celui que nous avons obtenu précédemment par rapport à l'action de g, lorsque T est petit, nous pourrons dire :

En ce qui concerne la partie périodique du mouvement des points m *et* m′, *on peut considérer ces deux points comme absolument indépendants pour les termes à courte période.*

Considérons maintenant le cas où T′ est très grand; si l'unité devient négligeable par rapport à ε', il vient :

$$\theta' = \frac{m}{m+m'}, \quad 2\pi\frac{\mu'}{T'} = 0.$$

La variation de la phase tend donc vers zéro. En outre, l'action de g' sur m a lieu de la même manière que si cette force se répartissait sur m et m' proportionnellement à ces masses.

Si nous rapprochons ce résultat de celui que nous avons obtenu précédemment pour l'action de g lorsque T est très grand, nous pourrons dire :

En ce qui concerne la partie périodique du mouvement des points m *et* m', *on peut considérer ces deux points comme invariablement reliés entre eux pour les termes à longue période.*

Dans tout autre cas, on a :

$$0 < \theta' < \frac{m}{m + m'},$$

θ' croissant au fur et à mesure que T augmente.

On pourrait poser

$$\theta' = \frac{m_1}{m_1 + m'}, \qquad m_1 < m,$$

et considérer que dans son mouvement la masse m' entraine une partie m_1 de la masse m.

Quant à la variation de la phase, elle varie de $\frac{\pi}{2}$ à 0.

Nous pourrons donc dire :

Pour les termes à période moyenne, on peut considérer que chacune des masses m *et* m' *entraine dans son mouvement une partie de la masse de l'autre d'autant plus grande que la période est plus grande; en outre, l'action de la force se produit avec une certaine variation dans la phase.*

Il nous reste à examiner la troisième partie de $\frac{dx}{dt}$, savoir :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_3 = \frac{A}{m + m'} - \frac{m'}{m + m'} A' e^{-\alpha\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)t}.$$

La partie correspondante de $\left(\frac{dx'}{dt}\right)$ serait :

$$\left(\frac{dx'}{dt}\right)_3 = \frac{A}{m + m'} + \frac{m}{m + m'} A' e^{-\alpha\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)t}.$$

On voit d'abord que ces deux parties sont indépendantes des forces périodiques F_x et $F_{x'}$; à mesure que t augmente, ces deux valeurs tendent vers la même limite :

$$\frac{A}{m+m'},$$

de sorte qu'après un temps très long, on peut considérer les deux points comme animés d'un mouvement uniforme de même vitesse; outre ce mouvement, chacun des points sera animé d'un mouvement oscillatoire déterminé par les forces F_x et $F_{x'}$, ainsi que nous venons de le voir.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, les mêmes conclusions sont applicables aux mouvements parallèles aux axes des y et des z; il y a seulement à tenir compte de la valeur plus ou moins grande du coefficient de frottement pour ces diverses directions.

Occupons-nous maintenant d'un cas qui diffère un peu du précédent, mais qui s'y ramène néanmoins. Supposons que les points m et m' sont animés chacun d'un mouvement sensiblement uniforme et rectiligne (*). Ce mouvement est troublé par l'action de forces perturbatrices très petites et de nature périodique; elles sont données en fonction de la position des points. En outre, nous admettons l'existence d'un frottement de même nature que celui considéré jusqu'ici. Pour ne pas compliquer inutilement les notations et les calculs, nous poserons simplement :

$$F_x = a\cos pu; \quad F_{x'} = 0;$$

a est un coefficient très petit, u est une fonction linéaire de $(x, y, z,)$ (x', y', z'). On reconnaîtra aisément par la suite que le problème se résoudrait de même si F_x et $F_{x'}$ se composaient chacun d'une série de termes de cette forme.

Les mouvements des deux points étant sensiblement uniformes, nous pouvons poser :

$$p\,u = \frac{2\pi}{T}(t-\lambda) + \delta,$$

δ étant une quantité très petite.

(*) Ou du moins qu'on peut considérer comme tel dans un intervalle de temps donné.



Les équations des mouvements des deux points sont donc :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=a\cos\left(2\pi\frac{t-\lambda}{T}+\delta\right)+\alpha\left(\frac{dx'}{dt}-\frac{dx}{dt}\right),$$

$$m'\frac{d^2x'}{dt^2}=\alpha\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right).$$

Si l'on néglige δ dans une première approximation, les équations auront la forme de celles du cas traité précédemment et nous pourrons les remplacer par les suivantes :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=a\theta\cos 2\pi\frac{t-\lambda+\mu}{T}+A'\alpha e^{-\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t},$$

$$m'\frac{d^2x'}{dt^2}=a\theta_1\cos 2\pi\frac{t-\lambda+\mu_1}{T}-A'\alpha e^{-\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t},$$

où θ, θ_1, μ, μ_1 ont des significations connues en fonction de α et T.

En intégrant, il vient comme plus haut :

$$m\frac{dx}{dt}=a\theta\frac{T}{2\pi}\sin 2\pi\frac{t+\mu-\lambda}{T}-A'\frac{mm'}{m+m'}e^{-\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t}+A\frac{m}{m+m'},$$

puis :

$$mx=-a\theta\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\cos 2\pi\frac{t+\mu-\lambda}{T}+\frac{A'}{\alpha}\left(\frac{mm'}{m+m'}\right)^2e^{-\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t}+A\frac{m}{m+m'}t+C,$$

C étant une constante.

On obtiendrait des équations analogues pour $\frac{dx'}{dt}$ et x'; et de même pour les autres axes coordonnés.

Puisque nous avons supposé d'abord que les mouvements étaient uniformes et rectilignes, x et u sont des fonctions linéaires de t, et on peut écrire :

$$mx=\frac{2\pi}{T}(t-\lambda)\sigma+v,$$

σ étant un coefficient numérique, et v une quantité de même nature que δ.

Les composantes de la force de frottement qui agit sur m' seront :

$$f_{x'} = -f_x, \quad f_{y'} = -f_y, \quad f_{z'} = -f_z.$$

Pour généraliser un peu la question, nous pouvons prendre :

$$f_x = \alpha\left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt}\right),$$

$$f_y = \beta\left(\frac{dy'}{dt} - \frac{dy}{dt}\right),$$

$$f_z = \gamma\left(\frac{dz'}{dt} - \frac{dz}{dt}\right).$$

Soient maintenant F_x, F_y, F_z, les composantes de la force périodique agissant sur m, et $F_{x'}$, $F_{y'}$, $F_{z'}$ celles de la force périodique qui agit sur m' ; nous aurons :

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + f_x \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + f_y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + f_z \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} m'\frac{d^2x'}{dt^2} &= F_{x'} + f_{x'} \\ m'\frac{d^2y'}{dt^2} &= F_{y'} + f_{y'} \\ m'\frac{d^2z'}{dt^2} &= F_{z'} + f_{z'} \end{aligned}\right\}.$$

Nous voyons tout de suite, en nous reportant aux expressions des forces f, qu'il suffit d'examiner simultanément les premières équations de ces deux groupes qui sont relatives à la direction x; ce que nous en déduirons pourra s'appliquer aux directions des y et des z, en tenant compte des valeurs particulières des constantes, qui peuvent différer pour les trois directions coordonnées.

Posons :

$$F_x = \sum a\cos\frac{2\pi(t-\lambda)}{T}; \qquad F_{x'} = \sum a'\cos\frac{2\pi(t-\lambda')}{T'};$$

il vient :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum a\cos\frac{2\pi(t-\lambda)}{T} + \alpha\left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt}\right),$$

$$m'\frac{d^2x'}{dt^2} = \sum a'\cos\frac{2\pi(t-\lambda')}{T'} + \alpha\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right).$$

Il s'agit d'intégrer ces équations.

En les ajoutant membre à membre et intégrant, il vient :

$$(1) \quad . \ . \ m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} = \frac{1}{2\pi}\sum a\mathrm{T}\sin\frac{2\pi(t-\lambda)}{\mathrm{T}} + \frac{1}{2\pi}\sum a'\mathrm{T}'\sin\frac{2\pi(t-\lambda')}{\mathrm{T}'} + \mathrm{A},$$

A étant une constante.

En divisant respectivement par m et m' les deux équations et les retranchant l'une de l'autre, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) + \alpha\left(\frac{1}{m'} + \frac{1}{m}\right)\left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) = \sum\frac{a'}{m'}\cos\frac{2\pi(t-\lambda')}{\mathrm{T}'} - \sum\frac{a}{m}\cos\frac{2\pi(t-\lambda)}{\mathrm{T}}.$$

Remarquant que le facteur d'intégration est :

$$e^{\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t},$$

nous aurons :

$$\left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt}\right)e^{\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t} = \sum\frac{a'}{m'}\int\cos\frac{2\pi(t-\lambda')}{\mathrm{T}'}e^{\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t}dt$$

$$-\sum\frac{a}{m}\int\cos\frac{2\pi(t-\lambda)}{\mathrm{T}}e^{\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t}dt + \mathrm{A}',$$

A′ étant une constante.

Or on a en général :

$$\int e^{qt}\cos nt.dt = \frac{1}{n}e^{qt}\frac{\sin nt + \frac{q}{n}\cos nt}{1 + \frac{q^2}{n^2}}.$$

Par suite, on a :

$$(2) \quad . \ . \ \frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt} = \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{m'}\sum a'\frac{\mathrm{T}'}{2\pi}\frac{\sin 2\pi\frac{t-\lambda'}{\mathrm{T}'} + \frac{\mathrm{T}'}{2\pi}\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\cos 2\pi\frac{t-\lambda'}{\mathrm{T}'}}{1 + \left(\frac{\mathrm{T}'}{2\pi}\right)^2\alpha^2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)^2} \\ &-\frac{1}{m}\sum a\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\frac{\sin 2\pi\frac{t-\lambda}{\mathrm{T}} + \frac{\mathrm{T}}{2\pi}\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\cos 2\pi\frac{t-\lambda}{\mathrm{T}}}{1 + \left(\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\right)^2\alpha^2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)^2} \\ &+ \mathrm{A}'e^{-\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t} \end{aligned}\right.$$

Combinant cette équation avec l'équation (1), on pourra calculer $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dx'}{dt}$.
Pour simplifier les notations, posons :

$$\varepsilon = \frac{T}{2\pi}\alpha\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right); \qquad \varepsilon' = \frac{T'}{2\pi}\alpha\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right).$$

Nous aurons d'abord en calculant $\frac{dx}{dt}$:

$$\left.\begin{array}{l} (m+m')\dfrac{dx}{dt} + \sum \dfrac{a'T'}{2\pi}\dfrac{\sin 2\pi\dfrac{t-\lambda'}{T'} + \varepsilon'\cos 2\pi\dfrac{t-\lambda'}{T'}}{1+\varepsilon'^2} \\ \qquad -\dfrac{m'}{m}\sum\dfrac{aT}{2\pi}\dfrac{\sin 2\pi\dfrac{t-\lambda}{T} + \varepsilon\cos 2\pi\dfrac{t-\lambda}{T}}{1+\varepsilon^2} \\ \qquad + m'A'e^{-\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \sum\dfrac{a'T'}{2\pi}\sin 2\pi\dfrac{t-\lambda'}{T'} \\ + \sum\dfrac{aT}{2\pi}\sin 2\pi\dfrac{t-\lambda}{T} + A. \end{array}\right.$$

Si nous groupons les termes de cette équation, il viendra :

$$\begin{aligned}(m+m')\frac{dx}{dt} = {} & \sum\frac{aT}{2\pi}\left[\left(1 + \frac{m'}{m}\cdot\frac{1}{1+\varepsilon^2}\right)\sin 2\pi\frac{t-\lambda}{T} + \frac{m'}{m}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\cos 2\pi\frac{t-\lambda}{T}\right] \\ & + \sum\frac{a'T'}{2\pi}\left[\left(1 - \frac{1}{1+\varepsilon'^2}\right)\sin 2\pi\frac{t-\lambda'}{T'} - \frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'^2}\cos 2\pi\frac{t-\lambda'}{T'}\right] \\ & + A - m'A'e^{-\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t}.\end{aligned}$$

On obtiendrait une expression analogue pour $\frac{dx'}{dt}$.

Nous pouvons distinguer trois parties dans la valeur de $\frac{dx}{dt}$: la première provient de F_x, la deuxième de $F_{x'}$; la troisième ne dépend que du frottement.

Examinons d'abord la première partie que nous désignerons par $\left(\frac{dx}{dt}\right)_1$; nous avons :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = \frac{1}{m+m'}\sum\frac{aT}{2\pi}\left[\left(1 + \frac{m'}{m}\,\frac{1}{1+\varepsilon^2}\right)\sin 2\pi\frac{t-\lambda}{T} + \frac{m'}{m}\,\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\cos 2\pi\frac{t-\lambda}{T}\right].$$

Posons :

$$1 + \frac{m'}{m}\,\frac{1}{1+\varepsilon^2} = \rho\cos\frac{2\pi\mu}{T},$$

$$\frac{m'}{m}\,\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} = \rho\sin\frac{2\pi\mu}{T};$$

il viendra :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = \frac{1}{m+m'} \sum \frac{aT}{2\pi} \rho \sin 2\pi \frac{t-\lambda+\mu}{T}.$$

Différentiant cette expression et multipliant par m, on a :

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_1 = \frac{m}{m+m'} \sum a\rho \cos 2\pi \frac{t-\lambda+\mu}{T}.$$

Comparons le terme de période T de cette expression, savoir :

$$g_1 = a\frac{m}{m+m'}\rho \cos 2\pi \frac{t-\lambda+\mu}{T},$$

avec le terme correspondant de F_x, c'est-à-dire :

$$g = a \cos 2\pi \frac{t-\lambda}{T}.$$

Nous voyons d'abord que dans g_1, l'amplitude de la force est réduite dans le rapport :

$$\theta = \rho \frac{m}{m+m'}.$$

En outre, il y a une variation de phase dans l'action de cette force; l'avance angulaire qui en résulte est $\frac{2\pi\mu}{T}$.

Des équations ci-dessus, on tire d'ailleurs :

$$\rho^2 = 1 + \frac{1}{1+\varepsilon^2}\left[2\frac{m'}{m} + \left(\frac{m'}{m}\right)^2\right],$$

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi\mu}{T} = \frac{\frac{m'}{m}\varepsilon}{1+\varepsilon^2+\frac{m'}{m}},$$

Pour nous faire une idée de la manière dont varient ces quantités, nous ferons quelques hypothèses particulières.

Supposons d'abord que T soit suffisamment petit pour que l'on puisse négliger ε devant l'unité; nous aurons :

$$\rho = 1 + \frac{m'}{m},$$

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{\mu}{T} = \frac{\frac{m'}{m}}{1 + \frac{m'}{m}} . \varepsilon.$$

On conclut de là que la variation de la phase tend vers zéro, à mesure que T diminue.

Ensuite, il vient :

$$\theta = 1.$$

Ainsi donc, à la limite $g_1 = g$.

En d'autres termes, la force g exerce son action sur le point m, comme si ce point était entièrement libre; l'action du frottement exercé par m' disparaît.

Supposons maintenant que T croisse, de sorte que ε soit très grand par rapport à $1 + \frac{m'}{m}$; nous aurons :

$$\rho = 1; \quad \theta = \frac{m}{m + m'};$$

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi\mu}{T} = \frac{m'}{m} \frac{1}{\varepsilon}.$$

On voit que la variation de la phase diminue à mesure que T augmente. Ensuite, la valeur de θ indique que, au point de vue de l'action exercée sur m, les choses se passent comme si la force g s'était répartie sur les masses m et m' proportionnellement à ces masses; ou si l'on veut, on peut dire que cette action s'exerce comme si m entraînait m' dans son mouvement.

Entre ces deux cas limites, on a toujours :

$$1 > \rho > \frac{m}{m + m'},$$



ρ décroissant à mesure que T augmente; on peut alors poser :

$$\theta = \frac{m}{m + m'_1}, \quad m'_1 < m'.$$

De sorte qu'au point de vue de l'intensité, l'action de g s'exerce de la même manière que si m entrainait une partie m'_1 de la masse de m'; cette partie entrainée croît avec T.

Quant à la variation de phase dans l'action de g, elle est nulle pour $T = 0$; elle croît d'abord avec T, passe par un maximum pour $\varepsilon^2 = 1 + \frac{m'}{m}$ ce qui donne :

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{\mu}{T} = \frac{\frac{m'}{m}}{2\sqrt{1 + \frac{m'}{m}}},$$

puis elle décroît de nouveau, et s'annule pour $T = \infty$.

Remarquons tout de suite que l'accroissement du coefficient α entraine les mêmes conséquences que l'accroissement de T; si α est très grand, le mouvement aura toujours à peu près lieu comme si les points m et m' étaient invariablement reliés; au contraire, si α décroit, l'indépendance des mouvements de m et de m' s'accentue, de la même manière que quand T décroit.

Passons maintenant à l'examen de la seconde partie de $\frac{dx}{dt}$; désignons-la par $\left(\frac{dx}{dt}\right)_2$, et nous aurons :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = \frac{1}{m + m'} \sum \frac{a'T'}{2\pi} \frac{\varepsilon'}{1 + \varepsilon'^2} \left[\varepsilon' \sin 2\pi \frac{t - \lambda'}{T'} - \cos 2\pi \frac{t - \lambda'}{T'}\right].$$

Posons :

$$\varepsilon' = \rho' \cos 2\pi \frac{\mu'}{T'}, \quad 1 = \rho' \sin 2\pi \frac{\mu'}{T'};$$

il viendra :

$$\rho' = \sqrt{1 + \varepsilon'^2}, \quad \operatorname{tg} 2\pi \frac{\mu'}{T'} = \frac{1}{\varepsilon'}.$$

Enfin :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = \frac{1}{m + m'} \sum \frac{a'T'}{2\pi} \frac{\varepsilon'}{\sqrt{1 + \varepsilon'^2}} \sin 2\pi \frac{t - \lambda' - \mu'}{T'}.$$

On en déduit :

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_2 = \frac{m}{m+m'}\sum g' \frac{\varepsilon'}{\sqrt{1+\varepsilon'^2}}\cos 2\pi\frac{t-\lambda'-\mu'}{T'}.$$

Comparons encore le terme de période T' de cette expression, c'est-à-dire :

$$g'_1 = \frac{m}{m+m'}a'\frac{\varepsilon'}{\sqrt{1+\varepsilon'^2}}\cos 2\pi\frac{t-\lambda'-\mu'}{T'},$$

avec le terme correspondant de $F_{x'}$, savoir :

$$g' = a'\cos\frac{2\pi(t-\lambda')}{T'}.$$

Nous constatons encore que le coefficient d'intensité a' de g' est réduit dans le rapport :

$$\theta' = \frac{m}{m+m'}\frac{\varepsilon'}{\sqrt{1+\varepsilon'^2}}.$$

Il y a ensuite un retard angulaire de la phase, représenté par $2\pi\frac{\mu'}{T'}$.

Examinons encore quelques cas particuliers.

Si T' décroît, il en est de même de ε', et à la limite, on a :

$$\theta' = 0, \quad \operatorname{tg}\frac{2\pi\mu'}{T'} = \infty.$$

Ainsi, dans ce cas, la force g' n'a nulle action sur le mouvement du point m.

Si nous rapprochons ce résultat de celui que nous avons obtenu précédemment par rapport à l'action de g, lorsque T est petit, nous pourrons dire :

En ce qui concerne la partie périodique du mouvement des points m *et* m', *on peut considérer ces deux points comme absolument indépendants pour les termes à courte période.*

Considérons maintenant le cas où T' est très grand; si l'unité devient négligeable par rapport à ε', il vient :

$$\theta' = \frac{m}{m+m'}, \quad 2\pi\frac{\mu'}{T'} = 0.$$

La variation de la phase tend donc vers zéro. En outre, l'action de g' sur m a lieu de la même manière que si cette force se répartissait sur m et m' proportionnellement à ces masses.

Si nous rapprochons ce résultat de celui que nous avons obtenu précédemment pour l'action de g lorsque T est très grand, nous pourrons dire :

En ce qui concerne la partie périodique du mouvement des points m *et* m'*, on peut considérer ces deux points comme invariablement reliés entre eux pour les termes à longue période.*

Dans tout autre cas, on a :

$$0 < \theta' < \frac{m}{m+m'},$$

θ' croissant au fur et à mesure que T augmente.

On pourrait poser

$$\theta' = \frac{m_1}{m_1+m'}, \quad m_1 < m,$$

et considérer que dans son mouvement la masse m' entraine une partie m_1 de la masse m.

Quant à la variation de la phase, elle varie de $\frac{\pi}{2}$ à 0.

Nous pourrons donc dire :

Pour les termes à période moyenne, on peut considérer que chacune des masses m *et* m' *entraine dans son mouvement une partie de la masse de l'autre d'autant plus grande que la période est plus grande; en outre, l'action de la force se produit avec une certaine variation dans la phase.*

Il nous reste à examiner la troisième partie de $\frac{dx}{dt}$, savoir :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_3 = \frac{A}{m+m'} - \frac{m'}{m+m'} A' e^{-\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t}.$$

La partie correspondante de $\left(\frac{dx'}{dt}\right)$ serait :

$$\left(\frac{dx'}{dt}\right)_3 = \frac{A}{m+m'} + \frac{m}{m+m'} A' e^{-\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t}.$$

Digitized by Google

On voit d'abord que ces deux parties sont indépendantes des forces périodiques F_x et $F_{x'}$; à mesure que t augmente, ces deux valeurs tendent vers la même limite :

$$\frac{A}{m + m'},$$

de sorte qu'après un temps très long, on peut considérer les deux points comme animés d'un mouvement uniforme de même vitesse ; outre ce mouvement, chacun des points sera animé d'un mouvement oscillatoire déterminé par les forces F_x et $F_{x'}$, ainsi que nous venons de le voir.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, les mêmes conclusions sont applicables aux mouvements parallèles aux axes des y et des z ; il y a seulement à tenir compte de la valeur plus ou moins grande du coefficient de frottement pour ces diverses directions.

Occupons-nous maintenant d'un cas qui diffère un peu du précédent, mais qui s'y ramène néanmoins. Supposons que les points m et m' sont animés chacun d'un mouvement sensiblement uniforme et rectiligne (*). Ce mouvement est troublé par l'action de forces perturbatrices très petites et de nature périodique; elles sont données en fonction de la position des points. En outre, nous admettons l'existence d'un frottement de même nature que celui considéré jusqu'ici. Pour ne pas compliquer inutilement les notations et les calculs, nous poserons simplement :

$$F_x = a \cos pu; \qquad F_{x'} = 0;$$

a est un coefficient très petit, u est une fonction linéaire de $(x, y, z,)$ (x', y', z'). On reconnaîtra aisément par la suite que le problème se résoudrait de même si F_x et $F_{x'}$ se composaient chacun d'une série de termes de cette forme.

Les mouvements des deux points étant sensiblement uniformes, nous pouvons poser :

$$pu = \frac{2\pi}{T}(t - \lambda) + \delta,$$

δ étant une quantité très petite.

(*) Ou du moins qu'on peut considérer comme tel dans un intervalle de temps donné.



Les équations des mouvements des deux points sont donc :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = a\cos\left(2\pi\frac{t-\lambda}{T} + \delta\right) + \alpha\left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt}\right),$$

$$m'\frac{d^2x'}{dt^2} = \alpha\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right).$$

Si l'on néglige δ dans une première approximation, les équations auront la forme de celles du cas traité précédemment et nous pourrons les remplacer par les suivantes :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = a\theta\cos 2\pi\frac{t-\lambda+\mu}{T} + A'\alpha e^{-\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t},$$

$$m'\frac{d^2x'}{dt^2} = a\theta_1\cos 2\pi\frac{t-\lambda+\mu_1}{T} - A'\alpha e^{-\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t},$$

où θ, θ_1, μ, μ_1 ont des significations connues en fonction de α et T.

En intégrant, il vient comme plus haut :

$$m\frac{dx}{dt} = a\theta\frac{T}{2\pi}\sin 2\pi\frac{t+\mu-\lambda}{T} - A'\frac{mm'}{m+m'}e^{-\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t} + A\frac{m}{m+m'},$$

puis :

$$mx = -a\theta\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\cos 2\pi\frac{t+\mu-\lambda}{T} + \frac{A'}{\alpha}\left(\frac{mm'}{m+m'}\right)^2 e^{-\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t} + A\frac{m}{m+m'}t + C,$$

C étant une constante.

On obtiendrait des équations analogues pour $\frac{dx'}{dt}$ et x'; et de même pour les autres axes coordonnés.

Puisque nous avons supposé d'abord que les mouvements étaient uniformes et rectilignes, x et u sont des fonctions linéaires de t, et on peut écrire :

$$mx = \frac{2\pi}{T}(t-\lambda)\sigma + v,$$

σ étant un coefficient numérique, et v une quantité de même nature que δ.

On peut prendre d'abord :

$$v = -a\theta\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \cos 2\pi\frac{t+\mu-\lambda}{T} + \frac{A'}{\alpha}\left(\frac{mm'}{m+m'}\right)^2 e^{-\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t},$$

si les termes considérés sont très petits.

Considérons le terme périodique :

$$a\theta\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \cos\frac{2\pi(t+\mu-\lambda)}{T}.$$

Si par la nature de la question T est petit, on sait que θ se rapproche de l'unité, et si en outre a est petit, le terme considéré est toujours très petit et peut être conservé dans la valeur de v.

Si, au contraire, T est très grand, θ est à peu près égal à $\frac{m}{m+m'}$; pour que le terme considéré soit très petit, il faut donc que a soit excessivement petit, ce que nous supposons dans le problème proposé.

Le terme :

$$\left(\frac{A'}{\alpha}\right)\left(\frac{mm'}{m+m'}\right)^2 e^{-\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t}$$

est petit, si le coefficient $\left(\frac{A'}{\alpha}\right)$ est suffisamment petit; nous avons vu qu'abstraction faite des termes périodiques, A′ est petit si, dans l'état initial, les deux points ont sensiblement la même vitesse; en outre, le terme devient petit au bout d'un temps t suffisamment grand.

Telles sont les conditions que nous devons supposer remplies, pour que le problème puisse être résolu par la méthode approchée précédente. On pourrait alors obtenir une valeur plus approchée de x et de x', en remplaçant v et par suite δ par leurs valeurs.

Il est clair qu'on pourrait maintenant déterminer le mouvement des points, si les forces périodiques étaient données, partie en fonction du temps, partie en fonction de la position des points.

Après avoir examiné le mouvement de deux points matériels, m, m', passons maintenant à l'étude du mouvement d'un système dans les mêmes conditions.

Pour cela, admettons d'abord qu'un troisième point m'' (x'', y'', z'') intervienne; ce point est soumis à l'action d'une force périodique $(F_{x''}, F_{y''}, F_{z''})$, et agit par frottement sur les points m et m'; grâce à ce frottement, la force $(F_{x''}, F_{y''}, F_{z''})$ exercera, en vertu de ce qui précède, une certaine action sur les mouvements des points m et m', action qui dépend de la grandeur des périodes des termes qui composent la force. On peut encore montrer que cette action est sensiblement nulle pour les termes à courte période, tandis que pour les termes à longue période, la masse m'' entraîne, dans son mouvement, les masses m et m', comme si ces trois masses formaient un système rigide.

Sans altérer la généralité de la question, nous pouvons poser :

$$F_x = F_{x'} = 0, \qquad F_{x''} = a'' \cos \frac{2\pi t}{T''};$$

les équations des mouvements des points seront de la forme :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \alpha \left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) + \alpha_1 \left(\frac{dx''}{dt} - \frac{dx}{dt}\right),$$

$$m' \frac{d^2x'}{dt^2} = \alpha \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right) + \alpha_2 \left(\frac{dx''}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right),$$

$$m'' \frac{d^2x''}{dt^2} = \alpha_1 \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx''}{dt}\right) + \alpha_2 \left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx''}{dt}\right) + a'' \cos \frac{2\pi t}{T''}.$$

On obtiendrait des équations de même forme pour les axes des y et des z.

Recherchons d'abord les termes périodiques de x, x', x''.

Posons :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{T''}{2\pi}\left(\lambda \cos \frac{2\pi t}{T''} + \mu \sin \frac{2\pi t}{T''}\right),$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{T''}{2\pi}\left(\lambda' \cos \frac{2\pi t}{T''} + \mu' \sin \frac{2\pi t}{T''}\right),$$

$$\frac{dx''}{dt} = \frac{T''}{2\pi}\left(\lambda'' \cos \frac{2\pi t}{T''} + \mu'' \sin \frac{2\pi t}{T''}\right).$$

Substituons dans les équations précédentes et égalons, dans chacune d'elles,



les coefficients de $\sin\frac{2\pi t}{T''}$ et $\cos\frac{2\pi t}{T''}$ dans les deux membres; nous aurons :

$$-m\lambda\frac{2\pi}{T''}=\alpha(\mu'-\mu)+\alpha_1(\mu''-\mu),$$

$$m\mu\frac{2\pi}{T''}=\alpha(\lambda'-\lambda)+\alpha_1(\lambda''-\lambda),$$

$$-m'\lambda'\frac{2\pi}{T''}=\alpha(\mu-\mu')+\alpha_2(\mu''-\mu'),$$

$$m'\mu'\frac{2\pi}{T''}=\alpha(\lambda-\lambda')+\alpha_2(\lambda''-\lambda'),$$

$$-m''\lambda''\frac{2\pi}{T''}=\alpha_1(\mu-\mu'')+\alpha_2(\mu'-\mu''),$$

$$m''\mu''\frac{2\pi}{T''}=\alpha_1(\lambda-\lambda'')+\alpha_2(\lambda'-\lambda'')+a''\frac{2\pi}{T''},$$

d'où l'on tire d'abord :

$$m\lambda+m'\lambda'+m''\lambda''=0,$$

$$m\mu+m'\mu'+m''\mu''=a''.$$

En résolvant les six équations précédentes, on obtient les (λ,μ) en fonction de a'' et de T''.

Examinons le cas où T'' est très petit ; on peut prendre :

$$\lambda=\lambda'=\lambda''=0,$$

$$\mu=\mu'=0,\quad \mu''=\frac{a''}{m''}.$$

On voit d'abord que le mouvement du point m'' n'influe pas sur ceux de m et de m'. Ensuite il vient :

$$\frac{dx''}{dt}=\frac{a''}{m''}\frac{T''}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{T''}.$$

$$m''\frac{d^2x''}{dt^2}=a''\cos\frac{2\pi t}{T''}.$$

Ainsi donc, lorsque la période T'' est très petite, on peut considérer les mouvements des trois points comme indépendants, quant à la partie périodique.

Supposons maintenant que T'' croisse de telle sorte que les quantités $\alpha T''$ soient très grandes; on satisfera aux équations en posant :

$$\lambda = \lambda' = \lambda'' = 0,$$

$$\mu = \mu' = \mu'' = \frac{a''}{m + m' + m''}.$$

Les équations des mouvements des points deviennent alors :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = a'' \frac{m}{m + m' + m''} \cos \frac{2\pi t}{T''},$$

$$m' \frac{d^2x'}{dt^2} = a'' \frac{m'}{m + m' + m''} \cos \frac{2\pi t}{T''},$$

$$m'' \frac{d^2x''}{dt^2} = a'' \frac{m''}{m + m' + m''} \cos \frac{2\pi t}{T''}.$$

Ainsi donc, la force $F_{x''}$ se répartit sur les trois points proportionnellement à leurs masses et sans changement de phase. On peut donc, dans ce cas, en ce qui concerne la partie périodique du mouvement, considérer les trois points comme invariablement reliés entre eux.

Les termes exponentiels du mouvement s'obtiendraient en satisfaisant aux équations :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \alpha \left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) + \alpha_1 \left(\frac{dx''}{dt} - \frac{dx}{dt}\right),$$

$$m' \frac{d^2x'}{dt^2} = \alpha \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right) + \alpha_2 \left(\frac{dx''}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right),$$

$$m'' \frac{d^2x''}{dt^2} = \alpha_1 \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx''}{dt}\right) + \alpha_2 \left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx''}{dt}\right),$$

d'où l'on tire d'abord :

$$m \frac{dx}{dt} + m' \frac{dx'}{dt} + m'' \frac{dx''}{dt} = A.$$

Nous ne nous occuperons pas davantage de cette partie; mais il est évi-



dent qu'au bout d'un temps très long, les vitesses des trois points tendent vers une même limite indépendante des forces périodiques.

Si l'on pose en effet :

$$\frac{dx}{dt} = B, \quad \frac{dx'}{dt} = B', \quad \frac{dx''}{dt} = B'',$$

il vient, en vertu des équations précédentes :

$$B = B' = B'' = \frac{A}{m + m' + m''}.$$

Il est clair que nous pouvons encore étendre les considérations précédentes au cas d'un nombre quelconque de points; en outre, au lieu de supposer que les forces agissantes sont données en fonction du temps t, on peut admettre que les points ont des mouvements sensiblement uniformes et rectilignes, et que ces mouvements sont troublés par l'action de forces perturbatrices très petites, de nature périodique et fonctions de la position des points. *Dans tous ces cas, l'action du frottement qui s'exerce entre les points sera encore telle, qu'en ce qui concerne la partie périodique du mouvement, les points pourront être considérés comme indépendants pour les termes à courte période, et comme invariablement reliés entre eux pour les termes à longue période; pour les périodes intermédiaires, les points s'entraînent plus ou moins dans leurs mouvements, et cette action donne lieu à des variations de phase dans l'action des forces.*

Ces résultats ont été obtenus, en supposant que les composantes de la force de frottement qui s'exerce entre deux points m et m' sont de la forme :

$$f_x = \alpha\left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt}\right),$$

$$f_y = \beta\left(\frac{dy'}{dt} - \frac{dy}{dt}\right),$$

$$f_z = \gamma\left(\frac{dz'}{dt} - \frac{dz}{dt}\right).$$

Pour généraliser l'expression de la loi de frottement, on pourrait prendre :

$$f_x = \alpha\left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) + \alpha_1\left(\frac{dy'}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) + \alpha_2\left(\frac{dz'}{dt} - \frac{dz}{dt}\right),$$

$$f_y = \beta\left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) + \beta_1\left(\frac{dy'}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) + \beta_2\left(\frac{dz'}{dt} - \frac{dz}{dt}\right),$$

$$f_z = \gamma\left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) + \gamma_1\left(\frac{dy'}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) + \gamma_2\left(\frac{dz'}{dt} - \frac{dz}{dt}\right).$$

Prenons maintenant les équations du mouvement de deux points, en posant $F_x = a\cos\frac{2\pi t}{T}$; nous pouvons provisoirement supposer nulles toutes les autres composantes des forces ; nous aurons :

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= a\cos\frac{2\pi t}{T} + f_x \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= f_y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= f_z. \end{aligned}\right\}, \qquad \left\{\begin{aligned} m'\frac{d^2x'}{dt^2} &= -f_x \\ m'\frac{d^2y'}{dt^2} &= -f_y \\ m'\frac{d^2z'}{dt^2} &= -f_z. \end{aligned}\right.$$

Si maintenant nous posons :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{T}{2\pi}\left(\lambda\sin\frac{2\pi t}{T} + \mu\cos\frac{2\pi t}{T}\right), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{T}{2\pi}\left(\lambda_1\sin\frac{2\pi t}{T} + \mu_1\cos\frac{2\pi t}{T}\right), \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{T}{2\pi}\left(\lambda_2\sin\frac{2\pi t}{T} + \mu_2\cos\frac{2\pi t}{T}\right), \end{aligned}\right\}, \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= \frac{T}{2\pi}\left(\lambda'\sin\frac{2\pi t}{T} + \mu'\cos\frac{2\pi t}{T}\right), \\ \frac{dy'}{dt} &= \frac{T}{2\pi}\left(\lambda'_1\sin\frac{2\pi t}{T} + \mu'_1\cos\frac{2\pi t}{T}\right), \\ \frac{dz'}{dt} &= \frac{T}{2\pi}\left(\lambda'_2\sin\frac{2\pi t}{T} + \mu'_2\cos\frac{2\pi t}{T}\right), \end{aligned}\right.$$

nous obtiendrons douze équations du premier degré pour déterminer les coefficients λ et μ, savoir :

$$\left.\begin{aligned} m\lambda\frac{2\pi}{T} &= a\frac{2\pi}{T} + \alpha(\mu' - \mu) + \alpha_1(\mu'_1 - \mu_1) + \alpha_2(\mu'_2 - \mu_2), \\ -m\mu\frac{2\pi}{T} &= \alpha(\lambda' - \lambda) + \alpha_1(\lambda'_1 - \lambda_1) + \alpha_2(\lambda'_2 - \lambda_2), \\ m'\lambda'\frac{2\pi}{T} &= \alpha(\mu - \mu') + \alpha_1(\mu_1 - \mu'_1) + \alpha_2(\mu_2 - \mu'_2), \\ -m'\mu'\frac{2\pi}{T} &= \alpha(\lambda - \lambda') + \alpha_1(\lambda_1 - \lambda'_1) + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda'_2), \text{ etc.} \end{aligned}\right\}.$$

On reconnait tout de suite que ces équations nous conduisent aux mêmes résultats que précédemment; lorsqu'on suppose T très petit, les mouvements des points sont indépendants; si T est très grand, le système se comporte comme un système invariable. Ainsi, la partie périodique du mouvement des deux points et même d'un système de points reste soumise aux lois que nous avons formulées précédemment.

Dans tous les calculs précédents, nous avons considéré comme constants les coefficients de frottement α, β, γ.

Il nous reste à voir si nos conclusions s'appliquent encore au cas où ces quantités varient avec le temps t, ou bien avec la position relative des points, leurs vitesses, etc...; ainsi, par exemple, on peut très bien admettre que le frottement qui s'exerce entre deux points m et m' dépend de leur distance, notamment décroît avec cette distance et disparait au delà d'un certain écartement.

Reprenons le cas du mouvement de deux points et posons simplement :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = a\cos\frac{2\pi t}{T} + \alpha\left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt}\right),$$

$$m'\frac{d^2x'}{dt^2} = \alpha\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right).$$

On tire d'abord de là :

$$m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} = a\frac{T}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{T} + A;$$

puis :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right) + \alpha\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right) = \frac{a}{m}\cos\frac{2\pi t}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Considérons d'abord α comme une fonction du temps t.

On sait que l'intégrale en $\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right)$ de l'équation (3) se compose d'abord de l'intégrale générale de l'équation :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right)_1 + \alpha\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right)_1 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

intégrale qui est de la forme :

$$\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)_1 = A'e^{-\int \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

L'intégrale de l'équation (3) comprend, en outre, un terme qui est une intégrale particulière de l'équation et qui ne provient que du terme additionnel $\frac{a}{m}\cos\frac{2\pi t}{T}$. Ainsi donc, chaque force périodique donne lieu à un terme spécial dans l'intégrale; seulement ce terme n'est plus entièrement périodique.

Dans le cas actuel, ce terme est :

$$\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)_2 = \frac{a}{m}e^{-\int \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)dt}\int \cos\frac{2\pi t}{T}\, e^{\int \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)dt}\, dt \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

On peut remarquer d'abord que l'on parviendrait à l'équation (4) en laissant de côté le terme périodique dans les équations du mouvement. Le terme (5) qui provient de cette équation (4) décroît indéfiniment, lorsque le temps augmente, puisque, par la nature même du frottement, α est toujours une quantité positive. Ce terme remplace, dans le cas actuel, le terme exponentiel des calculs précédents.

Examinons le terme (6) et tâchons de le mettre sous la forme :

$$\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)_2 = \frac{T}{2\pi}\left(\mu_1\sin\frac{2\pi t}{T}+\lambda_1\cos\frac{2\pi t}{T}\right),$$

λ_1 et μ_1 étant deux fonctions de t convenablement choisies; si nous substituons dans l'équation (3) et égalons les coefficients de $\cos\frac{2\pi t}{T}$ et $\sin\frac{2\pi t}{T}$ dans les deux membres, nous aurons :

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{m} &= \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\frac{T}{2\pi}\lambda_1+\mu_1+\frac{d\lambda_1}{dt}\frac{T}{2\pi} \\ 0 &= \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\frac{T}{2\pi}\mu_1-\lambda_1+\frac{d\mu_1}{dt}\frac{T}{2\pi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Les intégrales générales de ces équations comprennent d'abord les inté-



grales générales des équations :

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\frac{T}{2\pi}L + M + \frac{dL}{dt}\,\frac{T}{2\pi} \\ 0 &= \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\frac{T}{2\pi}M - L + \frac{dM}{dt}\cdot\frac{T}{2\pi} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

intégrales que nous représenterons par L et M. Les intégrales des équations (7) comprennent en outre deux termes spéciaux L_1 et M_1 qui sont deux solutions particulières de ces équations et qui ne proviennent que du terme additionnel $\frac{a}{m}$.

Or, dans le cas qui nous occupe, nous devons prendre pour valeurs de λ_1 et μ_1 ces solutions particulières. En effet, on parviendrait encore aux mêmes équations (7), si on voulait donner à l'intégrale générale de (3) la forme :

$$\frac{T}{2\pi}\left(\lambda'_1 \cos\frac{2\pi t}{T} + \mu'_1 \sin\frac{2\pi t}{T}\right);$$

car en procédant comme pour λ_1 et μ_1 on aurait :

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{m} &= \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\lambda'_1\frac{T}{2\pi} + \mu'_1 + \frac{d\lambda'_1}{dt}\,\frac{T}{2\pi} \\ 0 &= \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\mu'_1\frac{T}{2\pi} - \lambda'_1 + \frac{d\mu'_1}{dt}\,\frac{T}{2\pi} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \ldots \quad (9$$

d'où l'on tirerait :

$$\lambda'_1 = L + L_1,$$
$$\mu'_1 = M + M_1.$$

Or L et M renfermant les constantes arbitraires, la partie

$$\frac{T}{2\pi}\left(L \cos\frac{2\pi t}{T} + M \sin\frac{2\pi t}{T}\right)$$

ne peut conduire qu'au terme (5), tandis que L_1 et M_1 dépendant du terme additionnel, la partie

$$\frac{T}{2\pi}\left(L_1 \cos\frac{2\pi t}{T} + M_1 \sin\frac{2\pi t}{T}\right)$$

correspond au terme (6), que nous voulons considérer.



On peut d'ailleurs vérifier directement ces résultats.

Éliminons λ'_1 des équations (9), nous aurons :

$$\lambda'_1 = \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\frac{T}{2\pi}\mu'_1 + \frac{d\mu'_1}{dt}\frac{T}{2\pi} = \varepsilon\mu'_1 + \frac{d\mu'_1}{dt}\frac{T}{2\pi},$$

en posant :

$$\varepsilon = \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\frac{T}{2\pi}.$$

Il vient ainsi :

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\frac{d^2\mu'_1}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{T}{2\pi}\frac{d\mu'_1}{dt} + \mu'_1\left(\frac{T}{2\pi}\frac{d\varepsilon}{dt}+\varepsilon^2+1\right) = \frac{a}{m}, \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

ce qui nous donne, pour calculer M, l'équation :

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\frac{d^2M}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{T}{2\pi}\frac{dM}{dt} + M\left(\frac{T}{2\pi}\frac{d\varepsilon}{dt}+\varepsilon^2+1\right) = 0. \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Prenons d'abord le cas où α et par suite ε est constant; les deux équations précédentes deviennent :

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\frac{d^2\mu'_1}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{T}{2\pi}\frac{d\mu'_1}{dt} + \mu'_1(\varepsilon^2+1) = \frac{a}{m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\frac{d^2M}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{T}{2\pi}\frac{dM}{dt} + M(\varepsilon^2+1) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Posons $M = e^{qt}$; nous aurons, pour déterminer q, l'équation :

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 q^2 + 2\varepsilon\frac{T}{2\pi}q + \varepsilon^2 + 1 = 0,$$

d'où l'on tire :

$$q = -\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right) \pm \frac{2\pi}{T}\sqrt{-1}.$$

On a donc :

$$M = e^{-\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t}\left[C_1\cos\frac{2\pi t}{T} + C_2\sin\frac{2\pi t}{T}\right].$$



Si l'on déduit L à l'aide de cette valeur de M, on a :

$$L = \varepsilon M + \frac{dM}{dt}\frac{T}{2\pi} = e^{-\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t}\left[C_2 \cos\frac{2\pi t}{T} - C_1 \sin\frac{2\pi t}{T}\right];$$

puis il vient :

$$\frac{T}{2\pi}\left(L \cos\frac{2\pi t}{T} + M \sin\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{T}{2\pi}(C_1 + C_2)\, e^{-\alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)t} = A'\, e^{-\int \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)dt}$$

ce qui est conforme à nos conclusions.

De l'équation (12), on tire d'ailleurs aisément :

$$L_1 = \frac{a}{m}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}, \quad M_1 = \frac{a}{m}\frac{1}{1+\varepsilon^2},$$

d'où :

$$\frac{T}{2\pi}\left(L_1 \cos\frac{2\pi t}{T} + M_1 \sin\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{a}{m}\frac{T}{2\pi}\,\frac{\sin\frac{2\pi t}{T} + \varepsilon\cos\frac{2\pi t}{T}}{1+\varepsilon^2},$$

ce qui est bien le terme périodique que nous avons obtenu dans l'hypothèse de α constant.

Prenons maintenant le cas général. On satisfait à l'équation (11) en prenant :

$$M = e^{-\int \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)dt \pm \frac{2\pi t}{T}\sqrt{-1}}.$$

On peut donc prendre :

$$M = e^{-\int \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)dt}\left[C_1 \cos\frac{2\pi t}{T} + C_2 \sin\frac{2\pi t}{T}\right].$$

On en déduit :

$$L = e^{-\int \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)dt}\left[C_2 \cos\frac{2\pi t}{T} - C_1 \sin\frac{2\pi t}{T}\right].$$

Et l'on a encore :

$$\frac{T}{2\pi}\left(L \cos\frac{2\pi t}{T} + M \sin\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{T}{2\pi}(C_1 + C_2)\, e^{-\int \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)dt} = A' e^{-\int \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)dt}.$$

Ainsi donc les valeurs L et M conduisent bien au terme (5). Il reste à calculer L_1 et M_1. Pour cela, reprenons l'équation (10), et tâchons d'y satisfaire en prenant :

$$\mu_1' = e^{-\int \alpha \left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right) dt} \left[C_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + C_2 \sin \frac{2\pi t}{T} \right],$$

en considérant C_1 et C_2 comme des variables.

Nous aurons

$$\frac{d\mu_1'}{dt} = \frac{dM'}{dt},$$

en posant :

$$\frac{dC_1}{dt} \cos \frac{2\pi t}{T} + \frac{dC_2}{dt} \sin \frac{2\pi t}{T} = 0,$$

$\frac{dM'}{dt}$ étant une quantité de la même forme que $\frac{dM}{dt}$.

Ensuite :

$$\frac{d^2\mu_1'}{dt^2} = \frac{d^2M'}{dt^2} + e^{-\int \varepsilon \frac{2\pi}{T} dt} \left[\frac{dC_2}{dt} \cos \frac{2\pi t}{T} - \frac{dC_1}{dt} \sin \frac{2\pi t}{T} \right].$$

En substituant dans (10), il vient :

$$\frac{dC_2}{dt} \cos \frac{2\pi t}{T} - \frac{dC_1}{dt} \sin \frac{2\pi t}{T} = \frac{a}{m} \frac{2\pi}{T} e^{\int \varepsilon \frac{2\pi}{T} dt}.$$

Ensuite :

$$\frac{dC_1}{dt} = -\frac{a}{m} \frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi t}{T} e^{\int \varepsilon \frac{2\pi}{T} dt},$$

$$\frac{dC_2}{dt} = \frac{a}{m} \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi t}{T} e^{\int \varepsilon \frac{2\pi}{T} dt}.$$

Ainsi :

$$C_1 = C_1' - \frac{a}{m} \frac{2\pi}{T} \int^t \sin \frac{2\pi t}{T} \cdot dt \,.\, e^{\int^t \varepsilon \frac{2\pi}{T} dt},$$

$$C_2 = C_2' + \frac{a}{m} \frac{2\pi}{T} \int^t \cos \frac{2\pi t}{T} \cdot dt \,.\, e^{\int \varepsilon \frac{2\pi}{T} dt}.$$

On tire de là :

$$M_1 = \frac{a}{m}\,\frac{2\pi}{T}\,e^{-\int \varepsilon \frac{2\pi}{T} dt}\left[\sin\frac{2\pi t}{T}\int \cos\frac{2\pi t}{T}\cdot dt\,.\,e^{\int \varepsilon \frac{2\pi}{T} dt} - \cos\frac{2\pi t}{T}\int \sin\frac{2\pi t}{T}\cdot dt\,.\,e^{\int \varepsilon \frac{2\pi}{T} dt}\right],$$

$$L_1 = \frac{a}{m}\,\frac{2\pi}{T}\,e^{-\int \varepsilon \frac{2\pi}{T} dt}\left[\cos\frac{2\pi t}{T}\int \cos\frac{2\pi t}{T}\cdot dt\,.\,e^{\int \varepsilon \frac{2\pi}{T} dt} + \sin\frac{2\pi t}{T}\int \sin\frac{2\pi t}{T}\,.\,dt\,.\,e^{\int \varepsilon \frac{2\pi}{T} dt}\right].$$

Enfin :

$$\frac{T}{2\pi}\left(M_1 \sin\frac{2\pi t}{T} + L_1 \cos\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{a}{m}\,e^{-\int \varepsilon \frac{2\pi}{T} dt}\int \cos\frac{2\pi t}{T}\cdot dt\,.\,e^{\int \varepsilon \frac{2\pi}{T} dt},$$

ainsi qu'on devait s'y attendre.

Si l'on suppose ε constant, on retrouve encore :

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{a}{m}\,\frac{1}{1+\varepsilon^2} \\ L_1 &= \frac{a}{m}\,\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} \end{aligned}\right\}.$$

Ainsi donc, il est bien évident que nous devons prendre pour valeurs de λ_1 et μ_1 les valeurs de L_1 et M_1.

Ceci établi, passons à l'examen des divers cas.

Supposons d'abord que T soit très petit; les équations (7) pourront s'écrire, si l'on suppose que $\alpha\lambda_1$, $\alpha\mu_1$, $\frac{d\lambda_1}{dt}$, $\frac{d\mu_1}{dt}$ restent finis :

$$\frac{a}{m} = \mu_1, \quad 0 = \lambda_1;$$

ces solutions satisfont aux conditions ci-dessus indiquées.

On a ainsi :

$$\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx'}{dt}\right)_2 = \frac{a}{m}\,\frac{T}{2\pi}\,\sin\frac{2\pi t}{T};$$

on en conclut :

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_2 = a\cos\frac{2\pi t}{T}; \quad m'\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right)_2 = 0;$$

ainsi lorsque T est très petit, le terme provenant de la force redevient simplement périodique et le mouvement a lieu comme si les deux points étaient indépendants.

Considérons ensuite le cas où T est très grand, de sorte que αT a une valeur très grande; si nous supposons que λ_1 et μ_1 restent finis, les équations se réduiront à :

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{m}\frac{2\pi}{T} &= \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\lambda_1+\frac{d\lambda_1}{dt} \\ 0 &= \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\mu_1+\frac{d\mu_1}{dt} \end{aligned}\right\}.$$

D'où l'on déduit, à la limite :

$$\lambda_1=\mu_1=\sigma\cdot\frac{a}{m}; \quad (\sigma \text{ s'annulant à la limite})$$

ces solutions satisfont en outre à la condition ci-dessus ; on peut donc prendre :

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_2=a\frac{m}{m+m'}\cos\frac{2\pi t}{T}; \quad m'\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right)_2=a\frac{m'}{m+m'}\cos\frac{2\pi t}{T};$$

ainsi, lorsque T est très grand, les termes provenant de la force redeviennent simplement périodiques, et les points se meuvent sous l'influence de cette force, comme s'ils étaient invariablement reliés entre eux.

Pour les périodes intermédiaires, on peut encore considérer que les points s'entraînent partiellement; mais cette fois, la partie entraînée varie avec le temps t. Il y a aussi une variation de phase dans l'action des forces, et cette variation est aussi fonction du temps.

Nous avons en effet :

$$\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)_2=\frac{T}{2\pi}\left(\lambda_1\cos\frac{2\pi t}{T}+\mu_1\sin\frac{2\pi t}{T}\right);$$

on tire de là :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{d^2x'}{dt^2}\right)_2 &= \left(\mu_1+\frac{T}{2\pi}\frac{d\lambda_1}{dt}\right)\cos\frac{2\pi t}{T}+\left(\frac{d\mu_1}{dt}\frac{T}{2\pi}-\lambda_1\right)\sin\frac{2\pi t}{T} \\ &= \left(\frac{a}{m}-\varepsilon\lambda_1\right)\cos\frac{2\pi t}{T}-\varepsilon\mu_1\sin\frac{2\pi t}{T}. \end{aligned}$$

On a en outre :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + m' \frac{d^2x'}{dt^2} = a \cos \frac{2\pi t}{T},$$

ce qui donne :

$$(m + m') \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_2 = \left[a \cdot \frac{m + m'}{m} - \varepsilon\lambda_1 m'\right] \cos \frac{2\pi t}{T} - \varepsilon\mu_1 m' \sin \frac{2\pi t}{T},$$

$$(m + m') \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right)_2 = \varepsilon m \left[\lambda_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + \mu_1 \sin \frac{2\pi t}{T}\right].$$

Il suffirait maintenant de mettre comme précédemment ces formules sous la forme :

$$m \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_2 = a\theta \cos \frac{2\pi (t - \sigma)}{T},$$

$$m' \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right)_2 = a\theta' \cos \frac{2\pi (t - \sigma')}{T},$$

pour connaitre les coefficients d'action réciproque θ et θ' ainsi que les avances angulaires des phases, en fonction du temps t.

Ceci établi, il importe de remarquer qu'on peut parvenir directement aux équations (7) en partant des équations du mouvement. Posons en effet :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = \frac{T}{2\pi}\left(\lambda \cos \frac{2\pi t}{T} + \mu \sin \frac{2\pi t}{T}\right),$$

$$\left(\frac{dx'}{dt}\right)_2 = \frac{T}{2\pi}\left(\lambda' \cos \frac{2\pi t}{T} + \mu' \sin \frac{2\pi t}{T}\right).$$

En procédant comme auparavant, il viendra :

$$\left.\begin{aligned}
m\mu + m \frac{T}{2\pi} \frac{d\lambda}{dt} &= a + \alpha(\lambda' - \lambda) \frac{T}{2\pi} \\
-m\lambda + m \frac{T}{2\pi} \frac{d\mu}{dt} &= \alpha(\mu' - \mu) \frac{T}{2\pi} \\
m'\mu' + m' \frac{T}{2\pi} \frac{d\lambda'}{dt} &= \alpha(\lambda - \lambda') \frac{T}{2\pi} \\
-m'\lambda' + m' \frac{T}{2\pi} \frac{d\mu'}{dt} &= \alpha(\mu - \mu') \frac{T}{2\pi}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Si l'on posait maintenant

$$\lambda - \lambda' = \lambda_1 \quad \text{et} \quad \mu - \mu' = \mu_1,$$

on retomberait évidemment sur les équations (7). Mais il est clair qu'on peut traiter directement les équations (14) comme les équations (7); on les résoudra et on prendra pour valeurs de λ, λ', μ, μ', les termes, qui dans les intégrales générales de ces équations ne contiennent pas de constantes arbitraires et dépendent seulement du terme additionnel a. Ces termes sont, comme on le sait, des solutions particulières des équations.

Ainsi, par exemple, si T est très petit, on aura :

$$\mu = \frac{a}{m}, \quad \lambda = \lambda' = \mu' = 0,$$

et il viendra comme précédemment :

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_2 = a\cos\frac{2\pi t}{T}, \quad m'\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right)_2 = 0.$$

Au contraire, si T est très grand, il vient :

$$m\,\frac{d\lambda}{dt} = \alpha(\lambda' - \lambda),$$

$$m'\,\frac{d\lambda'}{dt} = \alpha(\lambda - \lambda'),$$

$$m\,\frac{d\mu}{dt} = \alpha(\mu' - \mu),$$

$$m'\,\frac{d\mu'}{dt} = \alpha(\mu - \mu').$$

On a ainsi :

$$\lambda = \lambda', \quad \mu = \mu',$$

et, comme précédemment :

$$\lambda_1 = \mu_1 = 0.$$

Ainsi les résultats sont conformes aux précédents. Mais, on peut, par ce

dernier procédé, généraliser encore davantage la loi de frottement ; on peut prendre :

$$f_x = \alpha\left(\frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) + \alpha_1\left(\frac{dy'}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) + \alpha_2\left(\frac{dz'}{dt} - \frac{dz}{dt}\right),$$

α, α_1, α_2 étant considérés maintenant comme des fonctions du temps t. Il est facile de voir que les résultats généraux précédents ne sont pas altérés. Le mode de calcul est analogue à celui que nous avons employé lorsque ces coefficients étaient considérés comme constants, sauf qu'ici il faut tenir compte de ce que les quantités λ, μ sont des fonctions du temps. On retombe sur un système d'équations de la forme (14), équations que l'on peut traiter de la même manière. Enfin, on peut étendre les mêmes considérations au cas d'un nombre quelconque de points matériels.

Nous venons de supposer que les coefficients de frottement sont donnés en fonction du temps; on peut aussi admettre que ces quantités sont des fonctions données de la position relative des points, de leurs vitesses, etc., en d'autres termes, qu'ils sont fonctions des $\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \ldots \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots\right)$. Dans ce cas, les équations du mouvement ne sont plus linéaires; d'où il résulte que chaque force périodique ne donne plus lieu, en général, à un terme séparé dans l'intégrale. On peut, néanmoins, toujours imaginer que les équations du mouvement ont été résolues et qu'on connaît les (x, y, z) en fonction de t; cela étant, les coefficients de frottement seraient connus en fonction de t, et on pourrait appliquer les méthodes précédentes. Chaque force périodique donne lieu, dans cette manière de voir, à un terme spécial dans le mouvement, terme à l'égard duquel on peut encore se représenter que l'un des points entraîne partiellement les autres dans son mouvement; seulement ici, la partie entraînée et la variation de phase dans l'action de la force doivent être considérées comme dépendant de toutes les forces périodiques agissantes, et non uniquement de la force considérée, comme dans le cas précédent. Quant aux cas des périodes très courtes ou très longues, il est clair que les résultats précédents restent acquis.

Ainsi, dans tous les cas, si une force périodique de période très petite agit sur les points du système, on pourra, dans la recherche du terme cor-



respondant, considérer ce point comme indépendant des autres, pourvu cependant qu'en vertu du mouvement même le coefficient de frottement entre ce point et un autre ne tende pas à devenir infiniment grand à un moment donné.

De même, si une force à longue période agit sur l'un des points, on peut considérer, dans la recherche du terme correspondant, ce point comme entraînant complètement tous ceux qui exercent sur lui une action de la nature du frottement; il faut encore supposer que, dans le cours du mouvement, et en vertu de celui-ci, le coefficient de frottement entre ce point et un de ceux qu'il entraine ne devient pas tellement petit que les quantités de l'ordre αT ne soient plus très grandes; par exemple, cela arrive si un point sort de la sphère d'action de l'autre. Remarquons encore que, pour que le système entier se meuve comme invariable dans ce cas, il n'est pas nécessaire que chaque point exerce un frottement sur tous les autres; il suffit que chaque point exerce une action de ce genre sur un nombre d'autres points, suffisant pour que l'on puisse considérer le système comme continu.

On peut encore admettre, dans ce qui précède, que certaines parties du système se solidifient, ce qui revient à supposer qu'entre les points correspondants les coefficients de frottement deviennent assez grands pour que, quel que soit T, le système de ces points puisse être considéré comme invariable. Il ne s'agira plus, dans ce qui précède, que de considérer les mouvements relatifs des points et des parties ainsi solidifiées, et on pourra appliquer à ces mouvements relatifs les conclusions ci-dessus suivant la grandeur des périodes des forces agissantes.

§ 2. — Sur l'effet des actions mutuelles intérieures.

Considérons deux points matériels $m(x, y, z)$ et $m'(x', y', z')$, soumis chacun à l'action d'une force de nature périodique et entre lesquels agit en outre une force centrale dont nous représenterons l'intensité attractive par $\varphi(r)$, r étant la distance des deux points.



Les équations du mouvement parallèle à l'axe des x seront de la forme :

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \varphi(r)\frac{x'-x}{r} + \sum a\cos\frac{2\pi(t-\delta)}{T} \\ m'\frac{d^2x'}{dt^2} &= \varphi(r)\frac{x-x'}{r} + \sum a'\cos\frac{2\pi(t-\delta')}{T'} \end{aligned}\right\}.$$

On tire d'abord de là :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m'\frac{d^2x'}{dt^2} = \sum a\cos\frac{2\pi(t-\delta)}{T} + \sum a'\cos\frac{2\pi(t-\delta')}{T'}; \quad . \; . \; . \quad (15)$$

ensuite :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x'}{dt^2} + \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)\frac{\varphi(r)}{r}(x-x') = \sum\frac{a}{m}\cos 2\pi\frac{t-\delta}{T} - \sum\frac{a'}{m'}\cos 2\pi\frac{t-\delta'}{T'}.$$

Il faut intégrer cette équation. Avant de la traiter dans le cas général, supposons d'abord qu'il s'agisse du cas simple, où l'on a :

$$\varphi(r) = hr,$$

h étant une quantité positive.

Il viendra :

$$\frac{d^2}{dt^2}(x-x') + h\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)(x-x') = \sum\frac{a}{m}\cos 2\pi\frac{t-\delta}{T} - \sum\frac{a'}{m'}\cos 2\pi\frac{t-\delta'}{T'}, \quad (16)$$

L'intégrale générale de cette équation comprend d'abord l'intégrale générale de l'équation :

$$\frac{d^2}{dt^2}(x-x') + h\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)(x-x') = 0; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

cette intégrale est

$$(x-x') = C_1\cos\frac{2\pi t}{\tau} + C_2\sin\frac{2\pi t}{\tau},$$

en posant pour simplifier :

$$h\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2.$$

L'intégrale de l'équation (16) comprend, en outre, des termes spéciaux, qui sont des solutions particulières de cette équation et qui proviennent seulement des termes additionnels des sommes :

$$\sum \frac{a}{m} \cos 2\pi \frac{t-\delta}{T} \quad \text{et} \quad - \sum \frac{a'}{m'} \cos 2\pi \frac{t-\delta'}{T'}.$$

Cherchons le terme correspondant au terme $\frac{a}{m} \cos 2\pi \frac{t-\delta}{T}$; en lui donnant la forme $\lambda \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \cos 2\pi \frac{t-\delta}{T}$, nous aurons, pour déterminer λ, l'équation :

$$\lambda = - \frac{a}{m} \frac{1}{1 - \left(\frac{T}{\tau}\right)^2}.$$

Nous avons donc enfin l'intégrale générale de l'équation (16) :

$$\begin{aligned} x - x' = {} & C_1 \sin 2\pi \frac{t}{\tau} + C_2 \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \\ & - \sum \frac{a}{m} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{1 - \left(\frac{T}{\tau}\right)^2} \cos 2\pi \frac{t-\delta}{T} \\ & + \sum \frac{a'}{m'} \left(\frac{T'}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{1 - \left(\frac{T'}{\tau}\right)^2} \cos 2\pi \frac{t-\delta'}{T'}. \end{aligned}$$

On tire de là :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x'}{dt^2} = {} & - \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \left[C_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau} + C_2 \cos \frac{2\pi t}{\tau} \right] \\ & + \sum \frac{a}{m} \frac{1}{1 - \left(\frac{T}{\tau}\right)^2} \cos 2\pi \frac{t-\delta}{T} - \sum \frac{a'}{m'} \frac{1}{1 - \left(\frac{T'}{\tau}\right)^2} \cos 2\pi \frac{t-\delta'}{T'}. \end{aligned}$$

Combinant cette équation avec l'équation (15), il vient :

$$\begin{aligned} (m + m') \frac{d^2x}{dt^2} = {} & - \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 m' \left[C_1 \sin 2\pi \frac{t}{\tau} + C_2 \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \right] \\ & + \sum a \left(1 + \frac{m'}{m} \frac{1}{1 - \left(\frac{T}{\tau}\right)^2} \right) \cos 2\pi \frac{t-\delta}{T} \\ & + \sum a' \left(1 - \frac{1}{1 - \left(\frac{T'}{\tau}\right)^2} \right) \cos 2\pi \frac{t-\delta'}{T'}. \end{aligned}$$

On obtiendrait une valeur analogue pour $\frac{d^2x'}{dt^2}$.

Nous pouvons distinguer trois parties dans la valeur de $\frac{d^2x}{dt^2}$.

La première partie, que nous désignerons par $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0$, est :

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 = -\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \frac{m'}{m+m'}\left(C_1 \sin\frac{2\pi t}{\tau} + C_2 \cos\frac{2\pi t}{\tau}\right).$$

On reconnaît tout de suite que cette partie, qui est périodique, est due à l'action de la force centrale $\varphi(r)$.

La seconde partie de $\frac{d^2x}{dt^2}$, que nous représenterons par $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_1$, est :

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_1 = \sum \frac{a}{m+m'}\left(1 + \frac{m'}{m}\frac{1}{1-\left(\frac{T}{\tau}\right)^2}\right)\cos 2\pi\frac{t-\delta}{T}.$$

Elle provient de la force périodique qui agit sur le point m.

Considérons le terme :

$$g = a\cos 2\pi\frac{t-\delta}{T}$$

de cette force, et comparons-le au terme correspondant de $m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_1$, savoir :

$$g_1 = a\frac{m}{m+m'}\left(1 + \frac{m'}{m}\frac{1}{1-\left(\frac{T}{\tau}\right)^2}\right)\cos 2\pi\frac{t-\delta}{T}.$$

Les deux forces ne diffèrent que par le coefficient d'intensité et non par la phase.

Le rapport des amplitudes de g_1 et de g est :

$$\theta = \frac{m}{m+m'}\left(1 + \frac{m'}{m}\frac{1}{1-\left(\frac{T}{\tau}\right)^2}\right).$$

Pour nous faire une idée de la variation d'intensité, examinons encore quelques cas particuliers.

Supposons d'abord que T soit très petit, sans que τ le soit (ce qui exige que h ne soit pas très grand vis-à-vis de m et de m'); on voit qu'à la limite nous aurons :

$$\theta = 1.$$

Puisque, en outre, il n'y a pas variation de phase, on en conclut que, dans ce cas, l'action de la force g s'exerce sur le point m, comme si ce point était indépendant de m'.

Supposons maintenant, au contraire, que T soit très grand sans que τ le soit (ce qui exige que h ne soit pas trop petit); nous aurons à la limite :

$$\theta = \frac{m}{m + m'}.$$

L'action de la force g s'exerce donc sur le point m, comme si le point m' y était invariablement relié.

Entre ces deux cas limites, on peut considérer que la masse m' influe plus ou moins fortement sur le mouvement de m; en d'autres termes, on peut considérer que l'action de g sur m s'exerce comme si m entraînait une certaine masse m_1 qui dépend de m, de m' et de $\frac{T}{\tau}$.

Si l'on pose, en effet :

$$\theta = \frac{m}{m + m_1},$$

il vient

$$m_1 = -m' \frac{m\left(\frac{T}{\tau}\right)^2}{m\left[1 - \left(\frac{T}{\tau}\right)^2\right] + m'}.$$

On voit que l'expression de la masse entraînée est plus compliquée que dans le cas de l'action du frottement.

Si nous attribuons à τ une valeur finie, nous avons cependant, comme dans le cas du frottement

$$m_1 = 0, \quad \theta = 1, \qquad \text{lorsque T est très petit,}$$

et

$$m_1 = m', \quad \theta = \frac{m}{m + m'}, \text{ lorsque T est très grand.}$$



Mais, entre ces deux limites, on n'a pas toujours :

$$0 < m_1 < m' \qquad \text{et} \qquad 1 > \theta > \frac{m}{m + m'};$$

m_1 peut même avoir des valeurs négatives.

Si T est plus petit que τ, m_1 est négatif et croît en valeur absolue, à mesure que T croît.

Pour $T = \tau$, on a $m_1 = -m$ et $\theta = \infty$. Malgré cette circonstance, il faut remarquer que l'on peut mettre l'intégrale précédente sous forme finie.

Pour le montrer, ne conservons que le terme en question dans l'équation (16); cette dernière devient :

$$\frac{d^2}{dt^2}(x - x') + h\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)(x - x') = \frac{a}{m}\cos 2\pi\frac{t - \delta}{T}.$$

L'intégrale générale est :

$$x - x' = C_1 \sin\frac{2\pi t}{\tau} + C_2 \cos\frac{2\pi t}{\tau} + \frac{a}{m}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{1 - \left(\frac{T}{\tau}\right)^2} \cos 2\pi\frac{t - \delta}{T}.$$

Nous pouvons la mettre sous la forme :

$$x - x' = C_0' \frac{\tau}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{\tau} + C_0 \cos\frac{2\pi t}{\tau}$$
$$- \frac{a}{m}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{1 - \left(\frac{T}{\tau}\right)^2}\left[\sin\frac{2\pi\delta}{T}\left(\frac{\tau}{T}\sin\frac{2\pi t}{\tau} - \sin\frac{2\pi t}{T}\right) + \cos\frac{2\pi\delta}{T}\left(\cos\frac{2\pi t}{\tau} - \cos\frac{2\pi t}{T}\right)\right],$$

en appelant C_0 et C_0' les valeurs initiales de $(x - x')$ et de $\frac{d(x - x')}{dt}$.

Si maintenant nous faisons $T = \tau$, il vient :

$$(x - x') = C_0' \frac{\tau}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{\tau} + C_0 \cos\frac{2\pi t}{\tau}$$
$$- \frac{a}{m}\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2\left[\sin\frac{2\pi\delta}{\tau}\left(\sin\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{\pi t}{\tau}\cos\frac{2\pi t}{\tau}\right) + \cos\frac{2\pi\delta}{\tau}\left(\frac{\pi t}{\tau}\sin\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right];$$

On peut écrire cette équation sous la forme

$$(x - x') = C'_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau} + C'_2 \cos \frac{2\pi t}{\tau} - \frac{a}{m} \frac{\tau}{4\pi} \cdot t . \sin 2\pi \frac{t - \delta}{T},$$

C'_1 et C'_2 étant deux constantes arbitraires.

On vérifie aisément que cette valeur de $(x - x')$ est la solution générale de l'équation ci-dessus dans le cas où $T = \tau$. Cette circonstance, savoir que $\theta = \infty$, s'explique par le fait que la force extérieure $a \cos \frac{2\pi t}{T}$ tend à imprimer au point m un mouvement synchrone à celui que tend à lui imprimer la force $\varphi(r)$. Il ne s'agit donc pas ici d'autre chose que d'une sorte de phénomène de résonnance.

Lorsque T satisfait à l'équation :

$$m \left[1 - \left(\frac{T}{\tau} \right)^2 \right] + m' = 0,$$

on a :

$$m_1 = \pm \infty \quad \text{et} \quad \theta = 0.$$

Ainsi, à cet instant, l'action de la force g ne se fait plus sentir dans le mouvement du point m.

Examinons maintenant la troisième partie de $\frac{d^2x}{dt^2}$; en la désignant par $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_2$, il vient :

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_2 = - \sum \frac{a'}{m + m'} \frac{\left(\frac{T'}{\tau}\right)^2}{1 - \left(\frac{T'}{\tau}\right)^2} \cos 2\pi \frac{t - \delta'}{T'}.$$

Cette partie provient de la force périodique qui agit sur m'.

Considérons le terme :

$$g' = a' \cos 2\pi \frac{t - \delta'}{T'}$$

de cette force, et comparons-le au terme :

$$g'_1 = - a' \frac{m}{m + m'} \frac{\left(\frac{T'}{\tau}\right)^2}{1 - \left(\frac{T'}{\tau}\right)^2} \cos 2\pi \frac{t - \delta'}{T'},$$

qui lui correspond dans $m \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_2$.

On voit d'abord que l'action de g' s'exerce sans variation de phase ; mais il y a une réduction d'intensité représentée par :

$$\theta' = -\frac{m}{m+m'}\frac{T'^2}{\tau^2 - T'^2}.$$

Si nous supposons que τ a une valeur finie différente de 0, on a encore pour

$$T' = 0, \quad \theta' = 0;$$

et pour

$$T' = \infty, \quad \theta' = \frac{m}{m+m'}.$$

Ainsi lorsque T′ est très petit, l'action de g' ne se fait pas sentir dans le mouvement de m ; au contraire, si T′ est très grand, le point m' entraîne le point m dans son mouvement, comme si ce dernier lui était invariablement relié. Pour les périodes intermédiaires, on peut encore imaginer que le point m' entraîne, dans son mouvement, une masse m'_1 dont la grandeur dépend de m, de m' et de $\frac{T'}{\tau}$.

En rapprochant ces résultats des précédents, nous pourrons donc dire :

En vertu de l'action de la force φ, *on peut considérer les points* m *et* m′ *comme indépendants relativement aux forces extérieures à courte période ; on peut les considérer comme invariablement reliés entre eux, quand il s'agit de forces extérieures à longue période ; pour les forces à période intermédiaire, on peut supposer que chacune des deux masses* m *et* m′ *entraîne une certaine masse complémentaire, dont la grandeur varie avec* m, m′ *et la grandeur de la période.*

Il est bien entendu que la grandeur de la période se mesure par rapport à la grandeur de la période τ, qui résulterait de la seule action de la force φ.

Il est clair aussi que l'on obtiendrait des résultats analogues pour les directions des y et des z.

Passons maintenant au cas d'un système de points.

Sans restreindre la généralité de la question, nous pourrons nous borner à trois points, entre lesquels s'exercent des forces centrales, et nous supposerons

qu'une force périodique extérieure agit sur l'un des points. Les équations du mouvement parallèle à l'axe des x sont donc de la forme :

$$\left.\begin{aligned} m\,\frac{d^2x}{dt^2} &= h\,(x'-x\,) + h'\,(x''-x\,) + a\cos\frac{2\pi t}{T} \\ m'\,\frac{d^2x'}{dt^2} &= h\,(x-x'\,) + h''(x''-x'\,) \\ m''\,\frac{d^2x''}{dt^2} &= h'\,(x-x'') + h''(x'-x'') \end{aligned}\right\} , \quad . \; . \; . \; . \; . \qquad (18)$$

où h, h', h'' sont des constantes positives.

Les intégrales générales de ces équations (18) comprennent d'abord les intégrales générales des équations :

$$\left.\begin{aligned} m\,\frac{d^2x}{dt^2} &= h\,(x'-x\,) + h'\,(x''-x'\,) \\ m'\,\frac{d^2x'}{dt^2} &= h\,(x-x'\,) + h''(x''-x'\,) \\ m''\,\frac{d^2x''}{dt^2} &= h'\,(x-x'') + h''(x'-x'') \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (19)$$

Ces dernières font connaître les termes qui dépendent des forces φ; leurs intégrales renferment les constantes arbitraires.

Les intégrales des équations (18) contiennent, en outre, des termes spéciaux, solutions particulières de ces équations, qui proviennent seulement du terme additionnel $a\cos\frac{2\pi t}{T}$.

Pour obtenir seulement ces termes, posons :

$$\left.\begin{aligned} x\, &= \lambda\,\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \cos\frac{2\pi t}{T} \\ x' &= \lambda'\,\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \cos\frac{2\pi t}{T} \\ x'' &= \lambda''\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \cos\frac{2\pi t}{T} \end{aligned}\right\} .$$

Nous aurons pour déterminer λ, λ', λ'', les équations suivantes :

$$-m\lambda\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = h(\lambda'-\lambda) + h'(\lambda''-\lambda) + a\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2,$$

$$-m'\lambda'\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = h(\lambda-\lambda') + h''(\lambda''-\lambda'),$$

$$-m''\lambda''\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = h'(\lambda-\lambda'') + h''(\lambda'-\lambda''),$$

d'où l'on tire d'abord :

$$m\lambda + m'\lambda' + m''\lambda'' = -a.$$

Si maintenant nous supposons que T soit très petit, sans que les quantités h soient très grandes, nous pourrons prendre :

$$\lambda = -\frac{a}{m}, \quad \lambda' = \lambda'' = 0,$$

c'est-à-dire, que nous pourrons considérer les mouvements des points comme indépendants.

Si, au contraire, nous supposons T très grand, de sorte que les quantités hT^2 soient très grandes, nous aurons sensiblement

$$\lambda = \lambda' = \lambda'' = -\frac{a}{m+m'+m''},$$

c'est-à-dire, que le mouvement aura lieu comme si les trois points m, m', m'' étaient invariablement reliés entre eux.

Il est clair qu'on peut étendre les considérations précédentes au cas d'un nombre quelconque de points et de forces extérieures périodiques.

Comme, en outre, les résultats sont également vrais pour les directions des y et des z, nous pourrons dire :

Dans un système de points matériels, en vertu de l'action des forces φ, on peut considérer les points comme indépendants entre eux, quant à l'action des forces périodiques à courte période ; on peut les considérer comme invaria-

blement reliés entre eux, quant à l'action des forces à longue période. Quant aux forces de période moyenne, on peut supposer que les points considérés entraînent certaines masses fictives dont la grandeur varie avec la masse des divers points et avec la grandeur des périodes.

Il est clair que la grandeur des périodes s'établit relativement à la grandeur de celles qui pourraient résulter de l'action seule des forces φ. Ainsi, il est évident que l'indépendance du mouvement de deux points cesse d'autant moins vite, lorsque la période croît, que l'attraction φ est moindre entre ces deux points; au contraire, plus grande est l'attraction φ, plus vite tend à s'établir l'égalité du mouvement des deux points, lorsque T augmente.

Dans tout ce qui précède, nous avons considéré la quantité h comme une constante, la fonction φ étant de la forme hr. Passons maintenant à l'examen du cas plus général où h est variable; admettons d'abord que h est une fonction donnée du temps t.

Reprenons simplement le cas de deux points; on verra tout de suite qu'on peut étendre le raisonnement au cas d'un nombre quelconque de points matériels.

Nous aurons :

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= h(x'-x) + a\cos\frac{2\pi t}{T} \\ m'\frac{d^2x'}{dt^2} &= h(x-x') \end{aligned}\right\} , \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

pour le mouvement parallèle à l'axe des x.

On tire d'abord de là :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m'\frac{d^2x'}{dt^2} = a\cos\frac{2\pi t}{T}; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

ensuite :

$$\frac{d^2}{dt^2}(x-x') + h\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)(x-x') = \frac{a}{m}\cos\frac{2\pi t}{T}. \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

Cette dernière équation est linéaire en $x - x'$. Son intégrale générale comprend d'abord l'intégrale générale de l'équation :

$$\frac{d^2}{dt^2}(x-x') + h\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)(x-x') = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

à laquelle on parviendrait directement en négligeant, dans les équations du mouvement, le terme $a \cos \frac{2\pi t}{T}$; nous désignerons par $(x-x')_0$ cette intégrale.

L'intégrale générale de (22) renferme, en outre, un terme spécial, solution particulière de cette équation, qui provient uniquement du terme additionnel. Désignons par $(x-x')_1$ cette seconde partie de l'intégrale.

Nous voyons donc que chaque force périodique extérieure donne lieu à un terme spécial, mais en général, ce terme n'est plus simplement périodique.

Cependant, essayons de le mettre sous la forme :

$$(x-x')_1 = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \left(\lambda_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + \mu_1 \sin \frac{2\pi t}{T}\right),$$

en considérant λ_1 et μ_1 comme des fonctions de t.

En substituant dans l'équation (22) et égalant les coefficients de $\cos \frac{2\pi t}{T}$ et de $\sin \frac{2\pi t}{T}$ dans les deux membres, nous aurons pour déterminer λ_1 et μ_1 les équations :

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{d^2\lambda_1}{dt^2} + 2\left(\frac{T}{2\pi}\right)\frac{d\mu_1}{dt} + \lambda_1\left[\left(\frac{T}{\tau}\right)^2 - 1\right] &= \frac{a}{m} \\ \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{d^2\mu_1}{dt^2} - 2\left(\frac{T}{2\pi}\right)\frac{d\lambda_1}{dt} + \mu_1\left[\left(\frac{T}{\tau}\right)^2 - 1\right] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

en posant, pour simplifier :

$$h\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2.$$

Les intégrales générales des équations (24) renferment d'abord les intégrales générales L_0, M_0 des équations :

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{d^2L_0}{dt^2} + 2\left(\frac{T}{2\pi}\right)\frac{dM_0}{dt} + L_0\left[\left(\frac{T}{\tau}\right)^2 - 1\right] &= 0 \\ \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{d^2M_0}{dt^2} - 2\left(\frac{T}{2\pi}\right)\frac{dL_0}{dt} + M_0\left[\left(\frac{T}{\tau}\right)^2 - 1\right] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Les intégrales générales de (24) renferment, en outre, deux termes spéciaux L_1 et M_1, solutions particulières de ces équations, qui proviennent seulement du terme additionnel $\frac{a}{m}$.

Il est clair que nous devons prendre :

$$\lambda_1 = L_1, \quad \mu_1 = M_1.$$

En effet, si l'on posait :

$$(x - x') = \frac{T}{2\pi}\left(\lambda'_1 \cos\frac{2\pi t}{T} + \mu'_1 \sin\frac{2\pi t}{T}\right),$$

on aurait pour λ'_1 et μ'_1 les mêmes équations (24), puis il viendrait :

$$\lambda'_1 = L_0 + L_1, \quad \mu'_1 = M_0 + M_1.$$

Les parties L_1 et M_1, qui renferment les constantes arbitraires, ne peuvent donner que :

$$(x - x')_0 = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \left[L_0 \cos\frac{2\pi t}{T} + M_0 \sin\frac{2\pi t}{T}\right],$$

tandis que L_1 et M_1, qui proviennent uniquement du terme additionnel, donnent :

$$(x - x')_1 = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \left[L_1 \cos\frac{2\pi t}{T} + M_1 \sin\frac{2\pi t}{T}\right].$$

Il est d'ailleurs aisé de le vérifier, dans le cas où h est constant ; on a alors :

$$\left.\begin{aligned} L_1\left[\left(\frac{T}{\tau}\right)^2 - 1\right] &= \frac{a}{m'} \\ M_1 &= 0. \end{aligned}\right\}.$$

D'où :

$$(x - x')_1 = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{a}{m} \cos\frac{2\pi t}{T},$$

ce qui est conforme aux résultats obtenus précédemment.

Cela étant, considérons de nouveau le cas où T est très petit, sans que τ le soit ; les équations (24) deviendront, si λ_1, μ_1 et leurs dérivées restent finis :

$$-\lambda_1 = \frac{a}{m},$$
$$\mu_1 = 0.$$

Alors il viendra :

$$(x - x')_1 = -\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{a}{m} \cos \frac{2\pi t}{T};$$

d'où l'on tire :

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x'}{dt^2}\right)_1 = \frac{a}{m} \cos \frac{2\pi t}{T},$$

puis :

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_1 = a \cos \frac{2\pi t}{T}; \quad m'\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right)_1 = 0.$$

Donc, dans ce cas, l'action de la force périodique se traduit encore par un terme périodique et les points m et m' sont indépendants dans leurs mouvements.

Passons maintenant au cas où T est très grand; alors les équations (24) donnent, si τ n'est pas aussi très grand $\left(\lambda_1, \mu_1, \frac{d\lambda_1}{dt}, \text{ et } \frac{d\mu_1}{dt} \text{ restant finis}\right)$:

$$\frac{d^2\lambda_1}{dt^2} + \lambda_1 \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2\mu_1}{dt^2} + \mu_1 \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 = 0;$$

d'où l'on tire :

$$\lambda_1 = 0, \quad \mu_1 = 0,$$

ou mieux

$$\lambda_1 = \frac{a}{m}\sigma; \quad \mu_1 = \frac{a}{m}\sigma_1,$$

σ et σ_1 tendant vers zéro, lorsque T augmente.

Il vient alors :

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_1 = \frac{m}{m+m'} a \cos \frac{2\pi t}{T}; \quad m'\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_1 = \frac{m'}{m+m'} a \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Dans ce cas, la force périodique donne donc lieu à un terme périodique, et les points m et m' se meuvent comme s'ils étaient invariablement reliés entre eux.

Pour les périodes intermédiaires, les masses m et m' ne sont plus indépendantes; on peut se représenter chacune de ces masses comme entraînant

une masse variable dont la grandeur dépend des masses m et m', et des périodes T et τ.

En outre, puisque, en général, on n'a pas $\mu_1 = 0$, il y a une variation de phase dans l'action des forces. Cette variation est aussi fonction du temps.

En procédant comme dans le cas où nous avons considéré l'action du frottement, il ne serait pas difficile d'étendre ces résultats au cas d'un nombre quelconque de points matériels.

On peut maintenant considérer le cas où h est une fonction des coordonnées des points mobiles. Ce cas se ramène aisément au précédent. Il suffit de supposer que les équations du mouvement sont résolues et qu'on connait les (x, y, z) en fonction du temps t.

Alors chaque force périodique donne encore lieu à un terme spécial. Seulement on doit se figurer que, dans le mouvement, chaque point du système entraîne une masse dont la grandeur dépend des masses des divers points et des périodes de toutes les forces périodiques. Il y a aussi une variation de phase qui dépend des mêmes quantités. Pour les périodes très courtes ou très longues, les résultats précédents restent évidemment acquis.

Ainsi donc, si l'on tient compte des attractions mutuelles d'un système de points, on peut dire que, lorsqu'une force périodique à courte période agit sur l'un d'eux, on peut le considérer comme indépendant des autres quant à l'action de la force, sauf le cas où, en vertu du mouvement, l'action attractive exercée par un de ces autres points sur le point considéré devient très grande. Au contraire, si une force à longue période agit sur un des points, on peut considérer tous les autres points comme y étant invariablement reliés, sauf naturellement ceux, qui en vertu du mouvement, viennent à tomber hors de la sphère d'action du point qui subit l'action de la force.

Si l'on suppose que le coefficient d'attraction h devient très considérable entre deux points, on pourra, quel que soit T, considérer ces deux points comme invariablement reliés entre eux. On peut donc toujours imaginer qu'une ou plusieurs parties du système proposé se solidifient.

Les conclusions précédentes s'appliqueront alors aux mouvements relatifs de ces diverses parties.

§ 3. — Sur l'action simultanée des causes précédentes.

Maintenant que, dans les paragraphes précédents, nous avons étudié séparément les effets produits par le frottement, d'une part, et par les actions mutuelles des points, d'autre part, au point de vue de l'action de forces périodiques extérieures, il nous sera aisé d'examiner ce qui se passe lorsque l'on considère les deux causes précédentes comme agissant simultanément.

Comme il est facile de le reconnaître, aussi bien par ce qui précède que par les considérations que nous allons développer, nous n'altérerons en rien la généralité de la question, en nous bornant à considérer un simple système de deux points matériels.

Supposons que les équations du mouvement parallèle à l'axe des x soient :

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \alpha\left(\frac{dx'}{dt}-\frac{dx}{dt}\right) + h(x'-x) + a\cos\frac{2\pi t}{T} \\ m'\frac{d^2x'}{dt^2} &= \alpha\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right) + h(x-x') \end{aligned}\right\}; \quad \ldots\ldots \tag{26}$$

et considérons d'abord le cas où les coefficients h et α sont constants.

Nous aurons d'abord :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m'\frac{d^2x'}{dt^2} = a\cos 2\pi\frac{t}{T}; \quad \ldots\ldots \tag{27}$$

ensuite :

$$\frac{d^2}{dt^2}(x-x') + \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)\frac{d}{dt}(x-x') + h\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)(x-x') = \frac{a}{m}\cos\frac{2\pi t}{T}\,.\,. \tag{28}$$

Pour intégrer cette équation, cherchons d'abord l'intégrale de :

$$\frac{d^2}{dt^2}(x-x')_0 + \alpha_0\frac{d}{dt}(x-x')_0 + h_0(x-x')_0 = 0, \quad \ldots\ldots \tag{29}$$

en posant, pour simplifier :

$$\alpha_0 = \alpha\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right); \qquad h_0 = h\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right).$$

Nous aurons tout de suite :

$$(x - x')_0 = e^{-\frac{\alpha_0}{2}t}\left[C_1 \sin\frac{2\pi t}{\tau_0} + C_2 \cos\frac{2\pi t}{\tau_0}\right],$$

en posant :

$$\left(\frac{2\pi}{\tau_0}\right)^2 = -\frac{\alpha_0^2}{4} + h_0.$$

Nous supposons que α soit assez petit pour que τ_0 ait une valeur réelle.

Cherchons maintenant l'intégrale particulière de l'équation (28), provenant du terme additionel $\frac{a}{m}\cos\frac{2\pi t}{T}$.

Posons cette intégrale particulière :

$$(x - x')_1 = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \left(\lambda_1 \cos\frac{2\pi t}{T} + \mu_1 \sin\frac{2\pi t}{T}\right).$$

λ_1 et μ_1 étant des constantes.

Substituant dans l'équation (28) et égalant les coefficients du sinus et du cosinus dans les deux membres, nous aurons :

$$\left.\begin{aligned} -\lambda_1 + \alpha_0 \frac{T}{2\pi}\mu_1 + h_0\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \lambda_1 &= \frac{a}{m} \\ -\mu_1 - \alpha_0 \frac{T}{2\pi}\lambda_1 + h_0\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \mu_1 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

On tire de là :

$$\lambda_1 = \frac{a}{m}\,\frac{\left(\frac{T}{\tau}\right)^2 - 1}{\varepsilon^2 + \left[\left(\frac{T}{\tau}\right)^2 - 1\right]^2}\,; \quad \mu_1 = \frac{a}{m}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + \left[\left(\frac{T}{\tau}\right)^2 - 1\right]^2},$$

en posant comme précédemment $\varepsilon = \alpha_0 \frac{T}{2\pi}$ et $\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 = h_0$.

Enfin, il viendra :

$$x - x' = e^{-\frac{\alpha_0}{2}t}\left[C_1 \sin\frac{2\pi t}{\tau_0} + C_2 \cos\frac{2\pi t}{\tau_0}\right]$$

$$+\frac{a}{m}\,\frac{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2}{\varepsilon^2 + \left[\left(\frac{T}{\tau}\right)^2 - 1\right]^2}\left[\left[\left(\frac{T}{\tau}\right)^2 - 1\right]\cos\frac{2\pi t}{T} + \varepsilon \sin\frac{2\pi t}{T}\right].$$

En combinant cette équation avec l'intégrale de (27), qui est :

$$mx + m'x' = -\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \cos\frac{2\pi t}{T} + A't + A,$$

on a la solution de la question.

On peut distinguer deux parties dans $(x - x')$ et par suite aussi dans x et x'.

La première est $(x - x')_0$; elle est évidemment due à l'action de la force φ, combinée à l'action du frottement. Cette partie n'est plus simplement périodique comme dans le cas où la force φ agit seule; elle tend vers zéro, à mesure que t augmente. Le frottement altère, en outre, la durée d'oscillation qui, de τ, devient τ_0, et l'on a :

$$\left(\frac{2\pi}{\tau_0}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 - \frac{\alpha_0^2}{4}.$$

La seconde partie de $(x - x')$ est $(x - x')_1$; elle provient de la force extérieure périodique.

Nous avons :

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x'}{dt^2}\right)_1 = \frac{a}{m}\,\frac{-1}{\varepsilon^2 + \left[\left(\frac{T}{\tau}\right)^2 - 1\right]^2}\left[\left[\left(\frac{T}{\tau}\right)^2 - 1\right]\cos\frac{2\pi t}{T} + \varepsilon\sin\frac{2\pi t}{T}\right],$$

et en combinant avec l'équation (27), il vient :

$$(m + m')\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_1 = a\left[\left[1 - \frac{\frac{m'}{m}\left[\left(\frac{T}{\tau}\right)^2 - 1\right]}{\varepsilon^2 + \left[\left(\frac{T}{\tau}\right)^2 - 1\right]^2}\right]\cos\frac{2\pi t}{T} - \frac{\varepsilon\frac{m'}{m}}{\varepsilon^2 + \left[\left(\frac{T}{\tau}\right)^2 - 1\right]^2}\sin\frac{2\pi t}{T}\right].$$

On conclut de là que l'action de la force

$$g = a\cos\frac{2\pi t}{T},$$

s'exerce sur le point m avec un changement d'intensité et une variation de



phase, qu'il serait facile d'évaluer, si l'on mettait la formule précédente sous la forme :

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_1 = a\theta \cos 2\pi \frac{t-\delta}{T}.$$

Examinons encore quelques cas particuliers.

Supposons que T soit très petit, de sorte que ε et $\frac{T}{\tau}$ tendent vers zéro ; nous aurons à la limite :

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_1 = \frac{a}{m} \cos \frac{2\pi t}{T} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right)_1 = 0.$$

Ainsi donc, au point de vue de l'action de la force g, on peut considérer les deux points m et m' comme complètement indépendants.

Supposons maintenant que T soit très grand, de sorte que ε et $\frac{T}{\tau}$ soient très grands.

Il viendra :

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_1 = \frac{a}{m+m'} \cos \frac{2\pi t}{T}; \quad \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\right)_1 = \frac{a}{m+m'} \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

La variation de phase disparait, comme dans le cas précédent, et l'on voit que l'action de la force g s'exerce comme si les points m et m' étaient invariablement reliés entre eux.

On remarquera qu'il suffit, pour que cette dernière circonstance ait lieu, ou que ε, ou que $\frac{T}{\tau}$ soit très grand.

Entre les cas limites que nous venons d'examiner, on pourra considérer la masse m comme entrainant une certaine masse m_1, dont la grandeur dépend de m, de m', de T, de τ et du coefficient α. En outre, il se produit une variation de phase dans l'action de la force.

Nous pouvons maintenant aborder l'étude du cas général, en considérant, dans les équations (26), h et α comme étant des fonctions du temps.

L'équation (27) ne change pas, pas plus que l'équation (28), où α_0 et h_0 sont alors des fonctions de t.

On peut encore décomposer $x - x'$ en deux parties : l'une $(x - x')_0$ satisfait à l'équation (29), et provient de l'action de la force φ et du frottement ;

l'autre partie $(x - x')_1$ est une solution particulière de (28) provenant seulement du terme additionnel.

En posant encore :

$$(x - x')_1 = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \left[\lambda_1 \cos\frac{2\pi t}{T} + \mu_1 \sin\frac{2\pi t}{T}\right],$$

où λ_1 et μ_1 sont des fonctions de t, on obtiendrait pour λ_1 et μ_1 des équations analogues à celles que nous avons déjà traitées dans les paragraphes précédents; elles donneraient encore généralement :

$$\lambda_1 = -\frac{a}{m}, \quad \mu_1 = 0,$$

lorsque T est très petit, et

$$\lambda_1 = \mu_1 = 0,$$

lorsque T est très grand.

On peut ensuite considérer le cas où h et α sont fonctions des coordonnées.

Enfin, étendant les considérations précédentes à un système de points, nous pourrons encore dire :

Dans un système de points matériels qui sont sollicités par leurs actions mutuelles et entre lesquels s'exercent des frottements, on peut considérer les points comme indépendants au point de vue de l'action des forces extérieures périodiques à courte période ; on peut les considérer comme invariablement reliés entre eux quant à l'action des forces à longue période ; en ce qui concerne l'action des forces à période intermédiaire, les points sont dans une dépendance variable, et on peut les considérer comme entraînant certaines masses, dont la grandeur varie suivant les circonstances ; il y a en outre aussi, en général, une variation de phase dans l'action des forces.

Il y a quelques restrictions à faire à cet énoncé, relativement aux points qui restent indépendants ou invariablement reliés entre eux. Il suffit de se rappeler ce que nous avons dit à cet égard, à la fin des deux paragraphes précédents.

§ 4. — Application aux mouvements relatifs de l'écorce et du noyau terrestres.

Imaginons maintenant un système de points matériels soumis à leurs actions mutuelles et exerçant en outre, dans leurs mouvements relatifs, des actions de frottement les uns sur les autres. Des forces extérieures agissent sur le système, et les équations du mouvement d'un point sont de la forme :

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \sum h\frac{x'-x}{r} + \sum f_x + F_x \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \sum h\frac{y'-y}{r} + \sum f_y + F_y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \sum h\frac{z'-z}{r} + \sum f_z + F_z \end{aligned}\right\},$$

équations dans lesquelles les quantités h, f, F ont les significations que nous leur avons attribuées précédemment. Nous aurons ensuite :

$$\left.\begin{aligned} \sum m\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2x_0}{dt^2}\sum m = \sum F_x \\ \sum m\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2y_0}{dt^2}\sum m = \sum F_y \\ \sum m\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d^2z_0}{dt^2}\sum m = \sum F_z \end{aligned}\right\},$$

x_0, y_0, z_0 étant les coordonnées du centre de gravité.

Si nous appelons (ξ, η, ζ) les coordonnées du point (x, y, z) par rapport au centre de gravité, nous aurons :

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta;$$

puis :

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \sum h\frac{\xi'-\xi}{r} + \sum f_\xi + F_\xi \\ m\frac{d^2\eta}{dt^2} &= \sum h\frac{\eta'-\eta}{r} + \sum f_\eta + F_\eta \\ m\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \sum h\frac{\zeta'-\zeta}{r} + \sum f_\zeta + F_\zeta \end{aligned}\right\},$$

en posant :

$$\left.\begin{aligned} F_\xi &= F_x - \frac{m}{\Sigma m}\sum F_x \\ F_\eta &= F_y - \frac{m}{\Sigma m}\sum F_y \\ F_\zeta &= F_z - \frac{m}{\Sigma m}\sum F_z \end{aligned}\right\}.$$

Supposons maintenant que les forces F_ξ, F_η, F_ζ soient des forces de nature périodique, soit qu'elles soient données directement en fonction du temps, soit qu'étant données en fonction de la position des points, on puisse, au moins dans une première approximation, les considérer comme des fonctions périodiques de t, en vertu du mouvement général. Les équations que nous obtenons ainsi sont alors de même forme que celles que nous avons traitées jusqu'ici, de sorte qu'on peut appliquer au mouvement du système autour du centre de gravité les résultats que nous avons obtenus précédemment.

Considérons, par exemple, le sphéroïde terrestre. On peut se représenter ce sphéroïde comme formé d'une croûte solide mobile sur un noyau qui est, soit fluide, soit solide, soit en partie fluide et en partie solide. On peut d'abord admettre qu'entre ces diverses parties s'exercent des actions de frottement, le noyau, quelle que soit sa nature frottant d'abord sur la croûte ; ensuite, si le noyau est fluide, on peut supposer qu'il existe un frottement intérieur dû au plus ou moins de viscosité de ce noyau. Enfin, il y a à

considérer les actions mutuelles qui s'exercent entre le noyau et l'écorce ou entre les divers points mêmes du noyau, si l'on admet que celui-ci est fluide.

Chaque point du système peut être considéré comme animé d'un mouvement qui diffère peu d'un mouvement de rotation sensiblement uniforme autour d'un certain axe passant par le centre de gravité, et, tout au moins dans une première approximation, on peut supposer qu'en vertu de ce mouvement sensiblement uniforme et des actions extérieures, chaque point est soumis à des forces perturbatrices périodiques. En nous reportant alors à ce que nous avons obtenu précédemment, nous pourrons dire :

Dans les mouvements à très longue période, le sphéroïde terrestre se meut sensiblement comme si la croûte et le noyau étaient solidaires ; dans les mouvements à très courte période, au contraire, le noyau et la croûte se meuvent indépendamment l'un de l'autre ; dans les mouvements à période moyenne, on peut considérer les deux parties comme s'entraînant partiellement, et il y a, en outre, généralement une variation de phase dans l'action des forces.

Il y a une remarque à faire au sujet de cet énoncé en ce qui concerne les mouvements à période moyenne.

Si l'on ne tient compte que du frottement, il résulte, en effet, de ce que nous avons vu précédemment, que l'on peut, généralement, considérer les deux parties comme s'entraînant *partiellement*, la masse entraînée par la croûte dans son mouvement étant une *fraction* déterminée de la masse du noyau et vice versâ (*). Si, au contraire, on tient compte seulement des actions mutuelles entre le noyau et l'écorce, il en est un peu différemment. Ces actions mutuelles, si elles agissent seules, tendent, pour un déplacement relatif initial quelconque, à amener un balancement de l'écorce sur le noyau. Si, en outre, des forces extérieures périodiques agissent sur l'écorce, celle-ci peut être considérée comme entraînant une certaine masse qui, en réalité, dans la

(*) Nous l'avons démontré pour le cas où les coefficients de frottement sont constants.

plupart des cas, dépend de la masse du noyau, mais qui n'en est pas toujours une *fraction* déterminée. Si nous nous reportons à ce que nous avons dit au § 2, nous savons que, suivant le rapport qui existe entre la période de la force extérieure et celle qui tend à résulter de l'action intérieure, la masse additionnelle varie beaucoup; elle peut être tantôt supérieure à celle du noyau, tantôt même négative, auquel cas, en vertu de l'action de la force intérieure, le coefficient de l'action de la force extérieure paraît renforcé. Néanmoins pour les cas limites, où T est très grand ou très petit, l'énoncé précédent reste strictement vrai. Quant au cas où l'on tient compte à la fois du frottement et des actions intérieures, il résulte d'abord de ce que nous avons vu que le frottement tend à faire disparaître avec le temps le mouvement de balancement dû aux actions intérieures, tout en altérant sa période; en ce qui concerne la masse entraînée, elle varie aussi beaucoup dans ce cas; mais, dans les cas extrêmes, l'énoncé précédent est encore vrai.

Signalons encore un cas qui peut se présenter.

Si nous prenons deux forces de même période dans le mouvement de l'écorce et du noyau, il peut se faire qu'en vertu de ces forces, ces parties des sphéroïdes prennent des mouvements concordants (c'est-à-dire ne donnant lieu à aucun déplacement relatif des points), lorsqu'on les considère comme indépendantes. Il est clair que, pour un tel groupe de termes, on doit pouvoir considérer à volonté les deux parties, ou comme réellement indépendantes, ou comme invariablement reliées entre elles, quelle que soit la période.

Pour le mieux faire voir, prenons simplement deux points et soit :

$$F_x = cm \cos \frac{2\pi t}{T} \quad \text{et} \quad F'_x = cm' \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Si l'on considérait les deux points comme indépendants, les termes périodiques, dans le mouvement parallèle à l'axe des x, seraient les mêmes pour les deux points.

En vertu de quoi, on peut nécessairement, quand il peut se produire des frottements ou quand il y a des actions mutuelles, considérer, quant à ces



termes périodiques, les points comme indépendants ou comme invariablement reliés entre eux.

Si l'on se reporte, en effet, à la formule (2), page 5, quant au frottement, les deux termes correspondants donnent, puisqu'ici :

$$a = cm \quad \text{et} \quad a' = cm' :$$

$$\frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt} = 0.$$

Pour les forces intérieures, il en est de même, si nous nous reportons à la formule de la page 33.

Du reste, ce résultat était à peu près évident par lui-même.

Le 5 janvier 1888.

NOUVEAUX ÉLÉMENTS

DE

L'ORBITE DE LA PLANÈTE (181) EUCHARIS,

PAR

L. DE BALL,

DOCTEUR EN PHILOSOPHIE,
PREPARATEUR DES COURS D'ASTRONOMIE ET DE GÉODÉSIE
A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 7 avril 1888.)

NOUVEAUX ÉLÉMENTS

DE

L'ORBITE DE LA PLANÈTE (181) EUCHARIS.

L'année dernière j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie un mémoire intitulé : *Recherches sur l'orbite de la planète* (181) EUCHARIS. Dans ce mémoire j'ai en premier lieu fait connaître les perturbations exercées sur la planète Eucharis par Jupiter et Saturne. Pour le calcul de ces perturbations je m'étais servi d'un système d'éléments (I) que voici :

ÉLÉMENTS (I) D'EUCHARIS.

Osculation et époque : 1881 août 31.0, temps moyen de Berlin.

$$\begin{aligned} M &= 264^\circ 37' 45''.1 \\ \omega &= 310\ 51\ 39\ .1 \\ \Omega &= 144\ 45\ 57\ .9 \\ i &= 18\ 35\ 27\ .5 \\ \varphi &= 12\ 43\ 58\ .8 \\ \mu &= 644''.4903 \end{aligned}$$

(ω, Ω, i : Équinoxe moyen 1880.0)

J'ai donné ensuite des éléments corrigés, savoir :

ÉLÉMENTS (II) D'EUCHARIS.

Osculation et époque : 1881 août 31.0, temps moyen de Berlin.

$$\begin{aligned} M &= 264^\circ 38' 31''.1 \\ \omega &= 310\ 51\ 10\ .3 \\ \Omega &= 144\ 46\ \ 0\ .8 \\ i &= 18\ 35\ 30\ .1 \\ \varphi &= 12\ 44\ \ 4\ .6 \\ \mu &= 644''.5034 \end{aligned}$$

(ω, Ω, i : Équinoxe moyen 1880.0)

A l'aide de ces éléments (II) et des anciennes valeurs des perturbations, des éphémérides ont été déduites pour toutes les apparitions d'Eucharis qu'on avait pu observer jusqu'en 1886. La comparaison de ces éphémérides aux observations avait fourni 8 positions normales de la planète et c'est à leur aide que j'avais calculé les éléments finaux :

ÉLÉMENTS (III) D'EUCHARIS.

Osculation et époque : 1881 août 31.0, temps moyen de Berlin.

$M = 264°38'31''.06$
$\omega = 310\ 51\ 7.89$
$\Omega = 144\ 46\ 3.25$ } Équinoxe moyen 1880 0
$i = 18\ 35\ 28.38$
$\varphi = 12\ 44\ 4.16$
$\mu = 644''.50284$

Partant de ces éléments (III) j'ai repris plus tard l'étude du mouvement d'Eucharis. Et d'abord les perturbations dues à l'action de Jupiter ont été calculées de nouveau. En outre, j'ai eu égard aux perturbations causées par Mars et négligées auparavant. Celles qu'a exercées Saturne ont pu être adoptées d'après les recherches antérieures. Je donnerai plus tard les perturbations totales des coordonnées polaires de la planète Eucharis. En comparant ces valeurs avec celles données dans les *Recherches*, on remarquera que les nouveaux résultats s'écartent en partie d'une manière assez sensible des anciens — ce qui tient surtout aux perturbations exercées par Mars. Voici les quantités à ajouter aux anciennes valeurs pour avoir les nouvelles (l'unité des dv et dz est la septième décimale) :

DATES.		$d(\Delta M)$	$d(\Delta\omega)$	dv	dz
1878 février.	11.5	$-2''.27$	$+0''.16$	-20	-1
— mars.	29.5	-2.13	$+0.16$	-21	0
1879 juin.	1.5	-1.02	$+0.17$	-19	$+3$
1880 juin.	12.5	$-0\ 25$	$+0.02$	-11	$+2$
1881 septembre . . .	17.5	0.00	0.00	0	0
1883 janvier.	5.5	$+0.23$	-0.28	-11	-2
1885 juillet	3.5	$+3\ 36$	-0.60	-24	-1
1886 juin.	27.5	$+4.01$	-0.74	-3	-5

Ces corrections sont assez considérables pour imposer une nouvelle détermination de l'orbite d'Eucharis. Ce qui m'a engagé encore davantage d'entreprendre ce travail c'est qu'aujourd'hui je dispose d'observations à la fois plus nombreuses et plus exactes qu'auparavant. Dans mes *Recherches* j'avais basé la position normale d'Eucharis correspondant à l'apparition en 1881 sur quatre observations faites à Palerme au moyen d'un micromètre circulaire. Plus tard mon attention a été appelée à quatre autres observations faites lors de cette apparition à Berlin et à Leipzig. Ces observations, faites au moyen de micromètres filaires et émanant d'astronomes dont on connaît la haute exactitude dans les mesures, ont permis de remplacer l'ancienne position normale pour 1881 par une nouvelle beaucoup plus exacte que la première et assez différente d'elle. Les autres positions normales ont subi des changements plus ou moins importants par l'emploi d'un nombre très considérable de nouvelles positions des étoiles de comparaison. Enfin, en me servant de toutes les observations d'Eucharis faites en 1886 et encore de celles faites en 1887, j'ai pu former des positions normales pour deux nouveaux termes: le nombre des équations de condition s'est donc accru de quatre et s'élève actuellement à vingt. — En résumé, dans le travail présent, les bases pour le calcul de l'orbite d'Eucharis sont beaucoup plus solidement établies qu'elles ne l'étaient dans mes *Recherches*.

Avant de faire connaître plus exactement ces bases ainsi que le système d'éléments fondés sur elles, j'adresse mes remerciements bien sincères aux astronomes qui, en observant de nouveau soit la planète Eucharis, soit les étoiles de comparaison, ont pris une large part dans le succès de mon entreprise : de déterminer aussi exactement que possible l'orbite d'Eucharis. Ces astronomes sont : Mme Lamb-Updegraff, MM. Charlois, Herz, Küstner, Knorre, J. Palisa, Peter, Pomerantzeff, Romberg et Schnauder. Je suis en outre très obligé à MM. Bossert et Rayet d'avoir bien voulu me donner connaissance de quelques observations d'étoiles de comparaison qui ne sont pas encore publiées.

PERTURBATIONS D'EUCHARIS DUES AUX ACTIONS RÉUNIES
DE JUPITER, SATURNE ET MARS.

Pour la signification des ΔM, Δω, ν et z, voir : OPPOLZER, *Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Cometen und Planeten,* II Band, pp. 139-162. Les ΔM et Δω ont été calculées jusqu'à un millième de seconde, les ν et z jusqu'à la neuvième décimale, l'unité des ν et z qui suivent est la septième décimale. — Les masses de Jupiter et de Saturne ont été adoptées d'après les recherches de Bessel, celle de Mars d'après M. Hall.

DATES.	ΔM.	Δω.	ν.	z.
1877 décembre 30	+ 0' 26''.37	- 4' 33''19	+ 12439	- 377
1878 février 8.	- 0 31.70	- 4 6.43	+ 10213	- 713
mars 20	- 1 18.91	- 3 41.48	+ 8156	- 1009
avril 29	- 1 56.06	- 3 18.39	+ 6305	- 1261
juin 8.	- 2 24 22	- 2 57.20	+ 4664	- 1467
juillet 18	- 2 44 47	- 2 37.85	+ 3229	- 1627
août 27	- 2 57.84	- 2 20.26	+ 1991	- 1742
octobre 6	- 3 5.51	- 2 4.30	+ 936	- 1816
novembre 15	- 3 7.79	- 1 49.84	+ 52	- 1851
1878 décembre 25	- 3 6.11	- 1 36.77	- 678	- 1852
1879 février 3.	- 3 1.03	- 1 24 96	- 1269	- 1821
mars 15.	- 2 53.24	- 1 14.30	- 1733	- 1764
avril 24	- 2 43.35	- 1 4.68	- 2085	- 1685
juin 3	- 2 31.90	- 0 56.02	- 2337	- 1587
juillet 13.	- 2 19.59	- 0 48 23	- 2502	- 1474
août 22	- 2 6.23	- 0 41.24	- 2590	- 1351
octobre 1	- 1 52.79	- 0 34.99	- 2611	- 1220
novembre 10	- 1 39.39	- 0 29.41	- 2574	- 1086
1879 décembre 20	- 1 26.32	- 0 24.45	- 2488	- 951
1880 janvier 29	- 1 13.80	- 0 20.07	- 2362	- 819
mars 9	- 1 2.01	- 0 16.23	- 2203	- 691
avril 18	- 0 51.12	- 0 12.88	- 2018	- 570
mai 28	- 0 41.23	- 0 10.00	- 1814	- 458
juillet 7	- 0 32.42	- 0 7.55	- 1598	- 356

DATES.	ΔM.	Δω.	v.	z.
août 16	− 0′ 24″.75	− 0′ 5″.50	− 1376	− 267
septembre 25	− 0 18.23	− 0 3.83	− 1153	− 190
novembre 4.	− 0 12.85	− 0 2.50	− 936	− 127
1880 décembre 14	− 0 8.56	− 0 1.49	− 730	− 77
1881 janvier 23	− 0 5.30	− 0 0.77	− 540	− 40
mars 4	− 0 2.96	− 0 0.30	− 372	− 16
avril 13	− 0 1.41	− 0 0.03	− 231	− 2
mai 23	− 0 0.52	+ 0 0.07	− 120	+ 3
juillet 2	− 0 0.11	+ 0 0.06	− 44	+ 3
août 11	− 0 0.00	+ 0 0.01	− 5	+ 1
septembre 20	+ 0 0.00	+ 0 0.02	− 5	+ 1
octobre 30	+ 0 0.11	+ 0 0.18	− 44	+ 10
1881 décembre 9.	+ 0 0.52	+ 0 0.65	− 118	+ 34
1882 janvier 18	+ 0 1.38	+ 0 1.60	− 223	+ 82
février 27	+ 0 2.84	+ 0 3.24	− 345	+ 164
avril 8	+ 0 4.95	+ 0 5.85	− 469	+ 292
mai 18	+ 0 7.63	+ 0 9.73	− 566	+ 478
juin 27	+ 0 10 67	+ 0 15.22	− 599	+ 738
août 6	+ 0 13.62	+ 0 22.68	− 518	+ 1086
septembre 15	+ 0 15.72	+ 0 32.36	− 261	+ 1540
octobre 25	+ 0 15.89	+ 0 44.39	+ 242	+ 2113
1882 décembre 4.	+ 0 12.67	+ 0 58.55	+ 1061	+ 2812
1883 janvier 13	+ 0 4.32	+ 1 14.22	+ 2243	+ 3632
février 22	− 0 11.08	+ 1 30.43	+ 3791	+ 4531
avril 3	− 0 35.30	+ 1 46.04	+ 5656	+ 5527
mai 13	− 1 9.72	+ 2 0.06	+ 7734	+ 6505
juin 22	− 1 55.09	+ 2 11.94	+ 9891	+ 7427
août 1	− 2 51.47	+ 2 21.50	+ 11993	+ 8239
septembre 10	− 3 58.25	+ 2 28.93	+ 13924	+ 8903
octobre 20	− 5 14.31	+ 2 34.56	+ 15599	+ 9395
1883 novembre 29	− 6 38.19	+ 2 38.79	+ 16963	+ 9703
1884 janvier 8.	− 8 8.21	+ 2 41.99	+ 17989	+ 9825
février 17	− 9 42.60	+ 2 44.47	+ 18670	+ 9768
mars 28	− 11 19.61	+ 2 46.51	+ 19013	+ 9543
mai 7.	− 12 57.55	+ 2 48.31	+ 19034	+ 9162
juin 16	− 14 34.83	+ 2 50.02	+ 18739	+ 8641
juillet 26.	− 16 9.99	+ 2 51.76	+ 18212	+ 7996
septembre 4	− 17 41.71	+ 2 53.63	+ 17422	+ 7243
octobre 14	− 19 8.81	+ 2 55.69	+ 16417	+ 6398
novembre 23	− 20 30.27	+ 2 57.98	+ 15225	+ 5475

DATES.		ΔM.	Δω.	ν.	z.
1885	janvier 2	− 21′ 45″18	+ 3′ 0″56	+ 13873	+ 4490
	février 11	− 22 52.80	+ 3 3.44	+ 12386	+ 3455
	mars 23	− 23 52.48	+ 3 6.66	+ 10791	+ 2385
	mai 2	− 24 43.74	+ 3 10.23	+ 9109	+ 1291
	juin 11	− 25 26.18	+ 3 14.18	+ 7366	+ 187
	juillet 21	− 25 59.54	+ 3 18.53	+ 5581	− 917
	août 30	− 26 23.66	+ 3 23.29	+ 3777	− 2009
	octobre 9	− 26 38.48	+ 3 28.49	+ 1975	− 3079
	novembre 18	− 26 44.06	+ 3 34.14	+ 195	− 4115
	décembre 28	− 26 40.56	+ 3 40.27	− 1543	− 5106
1886	février 6	− 26 28.25	+ 3 46.91	− 3218	− 6044
	mars 18	− 26 7.50	+ 3 54.08	− 4811	− 6916
	avril 27	− 25 38 77	+ 4 1.82	− 6301	− 7714
	juin 6	− 25 2.67	+ 4 10.16	− 7667	− 8428
	juillet 16	− 24 19.87	+ 4 19.14	− 8887	− 9046
	août 25	− 23 31.19	+ 4 28.82	− 9939	− 9560
	octobre 4	− 22 37.55	+ 4 39.25	− 10800	− 9960
	novembre 13	− 21 40.01	+ 4 50.47	− 11446	− 10235
	décembre 23	− 20 39.73	+ 5 2.57	− 11852	− 10376
1887	février 1	− 19 38.03	+ 5 15.61	− 11991	− 10374
	mars 13	− 18 36.36	+ 5 29.69	− 11838	− 10221
	avril 22	− 17 36.29	+ 5 44 88	− 11365	− 9908
	juin 1	− 16 39.56	+ 6 1.29	− 10544	− 9429
	juillet 11	− 15 48.04	+ 6 19.02	− 9348	− 8778
	août 20	− 15 3.71	+ 6 38.18	− 7755	− 7954
	septembre 29	− 14 28.69	+ 6 58.86	− 5744	− 6956
	novembre 8,	− 14 5.17	+ 7 21.15	− 3301	− 5791
	décembre 18	− 13 55.38	+ 7 45.10	− 426	− 4470

POSITIONS DES ÉTOILES DE COMPARAISON.

OBSERVATIONS D'EUCHARIS ET COMPARAISON DE CES OBSERVATIONS AUX ÉPHÉMÉRIDES.

Dans mon premier travail sur l'orbite d'Eucharis je m'étais servi de toutes les positions connues des étoiles de comparaison. Aujourd'hui, après avoir reçu un grand nombre de positions nouvelles, j'ai presque exclusivement fait usage des observations plus modernes. Les observations de Lamont ont été



négligées, leur relation au système du AGC [1] ne pouvant être déterminée d'une manière suffisante. J'ai encore négligé les positions déterminées par Argelander, sauf une seule, ces positions se rapportant à de faibles étoiles observées beaucoup plus exactement dans les derniers temps.

Les positions des étoiles de comparaison qui suivent sont déjà réduites au système du AGC; les corrections à ajouter à cette fin aux positions prises des catalogues se trouvent indiquées dans mes *Recherches sur l'orbite d'Eucharis*. Les observations nouvelles sont basées en grande majorité sur le AGC; les quelques exceptions seront citées plus tard.

Aussi dans le travail présent, pour déduire les positions probables des étoiles de comparaison, j'ai donné aux diverses positions d'une même étoile des poids plus ou moins arbitraires, me réservant de les évaluer plus rigoureusement à l'avenir. Aujourd'hui pour bon nombre d'autorités il nous manque encore des dates indispensables pour ce genre de recherches. Voici les abréviations dont je me servirai pour désigner les diverses autorités :

(N7YC) et (9YC) = New 7 Year et 9 Year Catalogue; (BBVI) = Bonner Beobachtungen, VI. Band; (Y) = Yarnall, II édition; (Schj) = Schjellerup; (Gött.) = Catalogue de Börgen et Copeland; (Gl.) = Glasgow Catalogue; (Br.) = Catalogue général des étoiles observées à l'Observatoire de Bruxelles, de 1857 à 1878; (P) = Observations faites à l'Observatoire de Paris; (Z—) = Observations de zones faites à Berlin (ZB.), Leipzig (ZL.) et à Nicolajew (ZN.); (Kr.) = Küstner; (Pr.) = Peter; (M.) = Bauschinger; (Bi.) = Bigourdan; (Bord.) = Rayet; (Lb.) = Lamb-Updegraff; (H.) = Herz; (R.) = Romberg; (S.) = Schnauder; (Cord.) = Gould, Argentine General Catalogue; (AN) = Astronomische Nachrichten; (T.) = Pomerantzeff.

Les observations de la planète Eucharis ont été comparées aux éphémérides calculées ou à l'aide des éléments (II) et en tenant compte des perturbations exercées par Jupiter et Saturne, ou à l'aide des éléments (III) et en tenant compte des perturbations exercées par Jupiter, Saturne et Mars. Suivant que le premier ou le second cas a eu lieu, je dirai que les observa-

[1] AGC signifie le « Fundamental-Catalog für die Zonenbeobachtungen der Astronomischen Gesellschaft (deux parties). »

tions ont été comparées aux éléments (II) respectivement aux éléments (III). Quant aux poids attribués aux diverses différences : observation-calcul, je renvoie aux remarques faites à ce sujet dans mes *Recherches*. Du reste, je ferai sur ces poids les mêmes réserves que sur ceux attribués aux positions des étoiles de comparaison, intimement liés les uns aux autres.

OBSERVATIONS D'EUCHARIS FAITES EN 1878.

Temps moyen de Berlin — Temps de l'aberration.		Observatoire.	Nº de l'étoile.	α (181) obs.	δ (181) obs.
février	3.5873	Berlin	21	10h 1m 47s.17	+11° 20' 49"4
»	3.8115	Clinton	19	10 1 38.25	+11 23 31.7
»	4.3644	Pola	17	10 1 16 33	+11 30 4.3
»	5.6522	Clinton	18	10 0 23.37	+11 45 25.2
»	7.4820	Strasbourg	15	9 59 6.74	+12 7 20.6
»	7.5552	Leipzig	20	9 59 3.49	+12 8 13.4
»	7.7406	Clinton	15	9 58 55.86	+12 10 28.6
»	11.5657	Berlin	13	9 56 11.37	+12 56 40.2
»	12.5061	Pola	M.	9 55 30.72	+13 8 2.3
»	12.5744	Leipzig	16	9 55 27.87	+13 8 51.0
»	14.7247	Clinton	14	9 53 53.70	+13 34 45.2
»	18.3694	Leipzig	10	9 51 15.44	+14 18 8.1
»	19.3993	»	»	9 50 31.35	+14 30 13.9
»	19.5765	Clinton	9	9 50 23.74	+14 32 18.0 [1]
»	20.3765	Bilk	7	9 49 50.04	+14 41 37.1 [2]
»	20.4639	Leipzig	12	9 49 46.15	+14 42 37.6
mars	3.4438	Leipzig	5	9 42 34.70	+16 42 37.5
»	4.4211	Marseille	6	9 42 1.09	+16 52 22.1
»	5.4399	»	»	9 41 26.77	+17 2 27.2
»	19.3623	Berlin	1	9 35 49.58	+18 58 22.0
»	19.4623	Leipzig	»	9 35 47.78	+18 59 1.8
»	22.3014	Berlin	2	9 35 12.26	+19 17 37.0 [1]
avril	7.4858	»	3	9 35 36.41	+20 30 59.2
»	21.3985	»	4	9 40 55.12	+20 53 38.8
»	22.3948	»	»	9 41 27.37	+20 54 1.2
»	29.4152	Leipzig	8	9 45 47.49	+20 52 12 9 [3]
mai	6.4350	Berlin	11	9 51 0.02	+20 43 26.4
»	7.4088	»	»	9 51 47.09	+20 41 41.5

[1] L'étoile de comparaison n'a été observée qu'une seule fois. — [2] Observation faite au moyen d'un micromètre circulaire. — [3] Air mauvais.

POSITIONS DES ÉTOILES DE COMPARAISON.

Nº de l'étoile.	Autorités.	α (1878.0).	δ (1878.0).	Époques.	Nombre des observations.	Poids.
	Kr.	9h 33m 58s.53	+ 18° 56′ 40″.8	86.3	2	1
	Pr.	58.61	40.9	86.9	3	1
	S.	58.61	41.6	87.2	4	1
1		9 33 58.58	+ 18 56 41.1			
2	Kr.	9 35 35.18	+ 19 19 42.9	85.3	1	
3	Kr.	9 35 45.10	+ 20 31 20.7	87.2	2	
4	Kr.	9 38 47.66	+ 20 52 3.8	87.2	2	
	Pr.	9 42 6.74	+ 16 40 48.0	86 9	3	1
	S.	6.72	49.1	87.2	4	1
5		9 42 6.73	+ 16 40 48.6			
6	ZB.	9 43 50.13	+ 16 52 54.3	70.3	2	
	Y.	9 44 12.99	+ 14 41 19.7	64.2 67.3	8.2	2.1
	ZL.	13.03	20.0	69 6	2	1
7		9 44 13.00	+ 14 41 19.9			
	Pr.	9 46 24 13	+ 20 50 19.5	87.2	2	2
	S.	24.09	21.2	87.2	4	3
	*		21.1	86.4		1
8		9 46 24.11	+ 20 50 20.6			
9	Schj.	9 49 50.97	+ 14 35 36.1	62.2	1	
	AN.	9 50 0.75	+ 14 24 53.4	62.3	1	1
	ZL.	0.76	51.8	69.6	2	2
	Pr.	0.93	51.6	87.2	2	2
	S.	0.94	50.3	87.2	4	3
10		9 50 0.87	+ 14 24 51.4			

* Rapportée au nº 11.

Nº de l'étoile.	Autorités.	α (1878.0).	δ (1878.0).	Époques.	Nombre des observations.	Poids.
	P.	9h 50m 56s.96	+ 20° 45′ 5″.1	74.5 75.3	4.3	1
	ZB.	56.93	4.9	80.8	2	1
11		9 50 56.95	+ 20 45 5.0			
	Pr.	9 51 35 15	+ 14 39 15.5	86.9	3	1
	S.	35.14	16.6	87.2	4	1
12		9 51 35.14	+ 14 39 16.1			
	Br.	9 51 39.64	+ 13 1 33.8	60.3 64.5	5.4	1
	N7YC.	39.55	33.8			2
	Y.	39.61	32.8	61.2 56.2	9.6	2.1
	P.	39.55	34.0	64.6 63.5	5.6	2
	ZL.	39.62	34 0	69.2	2	1
	9YC.	39.57	33.4	69.9 69.4	8	3
	Gl.	39.60	33.6	74.4 73.7	5.4	1
	AN.	39.54	33.7	86.4	3	1
13		9 51 39.58	+ 13 1 33.6			

Cette étoile a été aussi observée par Schj.

14	Kr.	9 53 34.95	+ 13 34 53.8	87.2	2	
	Br.	9 57 36.46	+ 12 13 4.2	65.5 71.5	4.3	1
	P.	36.38	3.9	66.9 64.3	3 2	1
	ZL.	36.35	3.0	69.2	2	1
	Gl.	36 42	2.8	71.0	4	1
15		9 57 36.40	+ 12 13 3.5			
	BBVI.	9 58 55.53	+ 13 7 51.5	62.2	1	1
	AN.	55.94	50.8	62.3	1	1
	Y.	55.84	52.0	62.7 65.3	2	1
	ZL.	55.85	53.6	69.2	2	2
16		9 58 55.81	+ 13 7 52.3			
	ZL.	9 59 6.48	+ 11 29 28.0	68.7	2	1
	Gl.	6.23	28.3	74.2 76.7	3 5	1.2
	Pr.	6.44	27.1	87.2	2	1
	S.	6.45	27.3	87.2	4	2
17		9 59 6.41	+ 11 29 27.7			

Nº de l'étoile.	Autorités.	α (1878.0).	δ (1878.0).	Époques.	Nombre des observations.	
	ZL.	10h 0m 13s.22	+ 11° 46′ 16″.5	68.7	2	1
	Pr.	13 21	17.2	87.2	2	1
	S.	13.21	16.8	87.2	4.3	2
18		10 0 13.21	+ 11 46 16.8			
19	ZL.	10 1 20.03	+ 11 25 50.1	68.2	2	
20	Kr.	10 1 42 90	+ 12 5 53.9	87.2	2	
	ZL.	10 2 48.57	+ 11 16 51.0	68 2	2	1
	Gl.	48.50	50.1	75.2 78.7	2.4	1.2
	Pr.	48.46	49.9	87,2	2	1
	S.	48.46	50.7	87.2	4	2
21		10 2 48.49	+ 11 16 50.4			

Les observations d'Eucharis faites en 1878 ont été comparées aux éléments (II). En réunissant dans une moyenne les différences : observation-calcul, qui se rapportent à une même étoile de comparaison, j'ai trouvé :

DATES.		Observ.-calc. Δα cos δ	Δδ	Étoile.	Nombre des différ.	Poids.
1878 février.	3.6	+ 0s.03	- 1″.0	21	1	1.0
»	3.8	+ 0.09	+ 1.3	19	1	0.75
»	4.4	+ 0.22	+ 0.8	17	1	1.0
»	5.7	+ 0.02	+ 0.1	18	1	1.0
»	7.6	- 0.04	- 1.5	15	2	1.5
» . . .	7.6	- 0.12	- 1.8	20	1	1.0
»	11.6	- 0.13	- 0.7	13	1	1 0
»	12.5	+ 0.04	- 0.7	M	1	1.5
»	12.6	+ 0 24	- 1.0	16	1	1.0
»	14.7	- 0.26	- 0.9	14	1	0.75
»	18.9	- 0.18	- 0 6	10	2	1.5
»	19.6	- 0.20	- 1.3	9	1	0.5
»	20.4	+ 0.27	- 1.0	7	1	0.75
»	20.5	+ 0.24	- 1.8	12	1	1.0
mars	3.4	- 0.06	+ 0.2	5	1	1.0
»	4.9	- 0.21	- 0.3	6	2	1.0

DATES.	Observ.-calc. $\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\delta$	Étoile.	Nombre des différ.	Poids.
1878 mars. 19 4	- 0s.15	- 2″1	1	1	1.5
» 22.3	- 0.18	- 1.5	2	1	0.75
avril. 7.5	+ 0.02	- 0.7	3	1	1.0
» 21.9	- 0.10	- 1.8	4	2	1.5
» 29.4	+ 0.05	[- 5.2]	8	1	1.5,0
mai 6.9	+ 0.05	- 2.6	11	2	1.5

De l'ensemble des observations faites au mois de février [1], il résulte pour

1878 février 11.5 : $\Delta\alpha \cos\delta = + 0^s.014$, $\Delta\delta = - 0''.75$; poids 14.25.

Les autres observations donnent pour

1878 mars 31.5 : $\Delta\alpha \cos\delta = - 0^s.075$, $\Delta\delta = - 1''.42$; poids 8.75.

Voici maintenant la comparaison des observations méridiennes faites en 1878 à l'Observatoire de Washington (Voir : Washington observations 1878, p. 145) aux éléments (II) :

DATES.	Observ.-calc. $\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\delta$	DATES.	Observ.-calc. $\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\delta$
Février 4.8	+ 0s.10	- 0″.5	Mars 13.7	+ 0s.14	- 2″.2
» 28.7	+ 0.22	- 0.1	» 20 6	+ 0.26	+ 0.4
Mars 1.7	- 0.01	- 3.2	» 23.6	- 0.06	- 4.0
» 4.7	+ 0.29	- 1.5	» 25.6	+ 0.24	+ 3.2
» 5.7	+ 0.18	- 3.3	Avril 2.6	+ 0.23	-10.5
» 9.7	+ 0.06	- 3.1	» 5.0	- 0.11	- 5.1

Avant de comparer ces observations à l'éphéméride, elles ont été réduites au système du AGC. A cette fin les quantités suivantes ont été ajoutées aux positions de la planète prises des Annales de l'Observatoire de Washington : $\Delta\alpha = - 0^s.01$, $\Delta\delta = + 0''.2$. Mais en comparant les corrections de l'éphémé-

[1] 7 Observations faites à l'Observatoire de Marseille ont été rejetées. (Voir *Recherches*, pp. 30-32.)

ride résultant de ces observations avec celles données plus haut, on remarquera que l'accord entre elles est loin d'être satisfaisant.

Il parait que les corrections à apporter aux positions observées à Washington, tout en gardant les signes ci-devant indiqués, doivent être considérablement augmentées. La moyenne des différences : observation-calcul résultant des observation faites à Washington est

1878 mars 12.6 : $\Delta\alpha \cos\delta = + 0^s.12$, $\Delta\delta = - 2''.5$.

Pour juger à quoi tient la grande différence entre cette correction et celles indiquées plus haut, il sera nécessaire de discuter aussi les autres observations de planètes faites à Washington à peu près en même temps que celles d'Eucharis. Pour le moment je négligerai ces dernières observations. Nous avons donc :

1878 février 11.5 : $\Delta\alpha = + 0''.22$; $\Delta\delta = - 0''.75$

» mars 31.5 : $\Delta\alpha = - 1''.20$; $\Delta\delta = - 1''.42$.

D'après les éléments (II) les positions d'Eucharis correspondant à ces dates sont (Équinoxe moyen 1880.0) :

1878 février 11.5 : $\alpha = 149^\circ\ 4'\ 55''.02$ $\delta = + 12^\circ\ 55'\ 24''.60$

» mars 29.5 : $\alpha = 143\ 39\ 59.75$ $\delta = + 19\ 56\ 32.31$

En ajoutant à ces positions les corrections données ci-dessus, il résulte les positions normales (Équinoxe moyen 1880.0) :

1878 février 11.5 : $\alpha = 149^\circ\ 4'\ 55''.24$ $\delta = + 12^\circ\ 55'\ 23''.85$

» mars 29.5 : $\alpha = 143\ 39\ 58.55$ $\delta = + 19\ 56\ 30.89$

OBSERVATIONS D'EUCHARIS FAITES EN 1879.

Temps moyen de Berlin — Temps de l'aberration.		Observatoire.	N° de l'étoile.	α (181) obs.	δ (181) obs.
Mai	24.5449	Berlin.	23	$15^h\ 23^m\ 34^s.85$	$+ 7^\circ\ 43'\ 12''.3$
Juin.	9.4832	Leipzig	22	15 13 36.06	+ 7 29 55.8

POSITIONS DES ÉTOILES DE COMPARAISON.

N° de l'étoile.	Autorité.	α (1879.0)	δ (1879.0)	Époques.	Nombre des observations.	Poids.
	P.	15h 13m 5s.34	+ 7° 25′ 50″.7	73.6	5	2
	ZL.	5.27	50.4	83.5	2	1
	R..	5.20	50.0	87.4	5.3	1
	Lb.	5 33	50.0	87.4	6	2
22		15 13 5.30	+ 7 25 50.3			
	AN.	15 22 49.94	+ 7 44 32.4	80 4	3	2
	R.	49.88	33 1	87.4	2	1.2
	Lb.	50.00	34 3	87.4	2.3	2
23		15 22 49.95	+ 7 44 33 3			

Les observations d'Eucharis faites en 1879 ont été comparées aux éléments (II). On trouve :

DATES.	Observ.-calcul. Δα cos δ	Δα	Étoile.
1879 mai. 24.5	+ 0s.07	- 4″.4	23
» juin. 9.5	+ 0.13	- 1.8	22

et la moyenne

$$1879 \text{ juin } 1.5 \quad \Delta\alpha = +1''.51, \quad \Delta\delta = -3''.10$$

D'après les éléments (II) la position d'Eucharis correspondant à cette date est (Équinoxe moyen 1880.0) :

$$1879 \text{ juin } 1.5 \quad \alpha = 229^\circ 33' 55''.40 \quad \delta = +7^\circ 42' 12''.93$$

En ajoutant à cette position les corrections données ci-dessus, on trouve la position normale

$$1879 \text{ juin } 1.5 \quad \alpha = 229^\circ\ 33'\ 56''.91 \quad \delta = +7^\circ\ 42'\ 9''.83 \text{ (Équinoxe moyen 1880.0).}$$



OBSERVATIONS D'EUCHARIS FAITES EN 1880.

Temps moyen de Berlin — Temps de l'aberration.		Observatoire.	N° de l'étoile.	α (181) obs.	δ (181) obs.
Juin.	10.5180	Berlin	24	19h 6m 32s.36	- 4° 56′ 43″.6
»	14.5225	»	»	19 4 3.29	- 5 0 24.9

POSITION DE L'ÉTOILE DE COMPARAISON.

N° de l'étoile.	Autorité.	α (1880.0)	δ (1880.0)	Époque.	Nombre des observations.
24	Kr	19h 4m 3s.33	- 4° 56′ 28″.2	85 7	2

Les observations d'Eucharis faites en 1880 ont été comparées aux éléments (II). Il résulte de ces observations

DATES.		Observ.-calc.		Étoile.
		Δα cos δ	Δδ	
1880 juin	10.5	- 0s.04	- 0″.5	24
»	14.5	- 0.26	+ 2.6	»

D'après les éléments (II) on a pour (Équinoxe moyen 1880.0) :

$$1880 \text{ juin } 12.5 \quad \alpha = 286^\circ\, 19'\, 24''.97 \quad \delta = -4^\circ\, 58'\, 22''.10.$$

En ajoutant à cette position la moyenne des corrections données ci-dessus, savoir :

$$\Delta\alpha = -2''.26, \quad \Delta\delta = +1''.05$$

on trouve la position normale, rapportée à l'équinoxe moyen 1880.0 :

$$1880 \text{ juin } 12.5 \quad \alpha = 286^\circ 19'\, 22''.71 \quad \delta = -4^\circ\, 58'\, 21''.05.$$

OBSERVATIONS D'EUCHARIS FAITES EN 1881.

Temps moyen de Berlin — Temps de l'aberration.		Observatoire.	Nº de l'étoile.	α (181) obs.	δ (181) obs.
Août.	29.4611	Leipzig	28		- 14° 26′ 24″.1
»	31.4661	Berlin	27	22h 34m 36s.97	- 14 43 26.6
Septembre.	23.5915	»	26	22 19 38.92	- 17 34 25.8
»	24.5532	»	25	22 19 8.85	- 17 40 4.5

POSITIONS DES ÉTOILES DE COMPARAISON.

Nº de l'étoile.	Autorité	α (1881.0)	δ (1881.0)	Époque.	Nombre des observations.	Poids.
	AN.	22h 18m 26s 09	- 17° 40′ 57″.3	83.9	1	1
	H.	26.11	59.4	87.8	3	2
25		22 18 26.10	- 17 40 58.7			
	AN. *	22 19 48.64	- 17 34 58.3	83.9		1
	H.	48.45	58.0	87.8	2.3	1
26		22 19 48.45	- 17 34 58.1			
	AN.	22 32 13.83	- 14 41 5.4		4	1
	S.	13 83	7.4	87.8	4	1
27		22 32 13.83	- 14 41 6.4			
28	S.	22 39 47.44	- 14 27 41.5	87.8	4	

* L'étoile a été comparée au nº 25.

Les observations d'Eucharis faites en 1881 ont été comparées aux éléments (III); il résulte de ces observations :

DATES.		Observ.-calc. Δα cos δ	Δδ	Étoile.
1881 août	29.5		- 3″.7	28
» »	31.5	- 0s.12	+ 0 7	27
» septembre	23.4	- 0.03	- 0.9	26
» »	24.3	- 0.09	- 2 1	25

En ajoutant la moyenne de ces corrections, savoir :

$$\Delta\alpha = -1''.25, \quad \Delta\delta = -1''.50$$

à la position calculée pour 1881, septembre 17.5, à l'aide des éléments (III) (Équinoxe moyen 1880.0) :

1881 septembre 17.5 $\alpha = 335^\circ\, 44'\, 14''.11$ $\delta = -16^\circ 56' 32''.41$,

on trouve la position normale rapportée à l'équinoxe moyen 1880.0 :

1881 septembre 17.5 $\alpha = 335^\circ\, 44'\, 12''.86$ $\delta = -16^\circ\, 56'\, 33''.91$

4 observations faites à l'Observatoire de Palerme au moyen d'un micromètre circulaire ont été rejetées. (« Recherches », p. 35.)

OBSERVATIONS MÉRIDIENNES D'EUCHARIS FAITES EN 1883.

Temps moyen de Berlin — Temps de l'aberration.		Observatoire.	α (181) obs.	δ (181) obs.
Janvier.	2.4443	Paris	$4^h\, 57^m\, 29^s.99$	$-2^\circ\, 55'\, 9''.9$
—	8.4256	—	4 54 28.82	− 1 59 36 6

En comparant ces observations aux éléments (II), on trouve :

DATES.		Observ.-calc. Δα cos δ	Δδ
1883 janvier	2.4	$-0^s.04$	$+1''.4$
—	8.4	− 0 05	+ 3.2

La moyenne de ces corrections : $\Delta\alpha = -0''.68$, $\Delta\delta = +2''.3$, ajoutée à la position résultant des éléments (II), 1883, janvier 5.5 : $\alpha = 73^\circ 55' 17''.86$, $\delta = -2^\circ 27' 49''.03$ donne la position normale, rapportée à l'équinoxe moyen 1880.0 :

1883 janvier 5.5 $\alpha = 73^\circ\, 55'\, 17''.18$ $\delta = -2^\circ\, 27'\, 46''.73$

OBSERVATIONS D'EUCHARIS FAITES EN 1885.

Temps moyen de Berlin — Temps de l'aberration.		Observatoire.	Nº de l'étoile.	α (181) obs.	δ (181) obs.
Juin	19.4294	Nice	31	17ʰ 5ᵐ 6ˢ.98	+ 0° 17′ 11″.2
»	20.4271	»	»	17 4 24.43	+ 0 15 13.0
Juillet	10.4743	»	30	16 52 13.57	− 0 49 10.0
»	15.4396	»	29	16 50 2.08	− 1 11 39.7

POSITIONS DES ÉTOILES DE COMPARAISON.

Nº de l'étoile.	Autorité.	α (1885.0).	δ (1885.0).	Époques.	Nombre des observations.	Poids.
.	Schj.	16ʰ 51ᵐ 0ˢ.40	− 1° 5′ 38″.9	63.4	2	0,1
	Gött.	0.29	39.3	67.9	2	0,1
	ZN.	0.38	38.0	83.5	2	1
	R.	0.38	39.0	87.4	3.2	½,1
	S.	0.49	38.0	87.5	4	2
	Lb.	0.45	37.4	87 5	5.5	2
29		16 51 0.44	− 1 5 38.2			

Peut-être existe-t-il un faible mouvement propre en ascension droite; par ce motif, j'ai rejeté les observations anciennes. L'AR observée par Bessel est (1822.9) $\alpha = 16^h 51^m 0^s.20$; Lamont donne $0^s.25$.

	Gött.	16ʰ 52ᵐ 5ˢ.90	− 0 57 53.7	67.9	2	1
	ZN.	5.83	53.7	83.5	2	1
	R.	5.73	55.1	87.4	3.2	½,1
	S.	5.96	54.0	87.5	6	2
30		16 52 5.89	− 0 57 54.1			2
	Schj.	17 2 54.99	+ 0 11 1.1	63.5	1	0,½
	ZN.	54.46	4.8	83 5	2	1
	R.	54.56	3.8	87.4	3	½,1
	S.	54.57	3.7	87.5	6	2
	Lb.	54.56	3.7	87.5	4.6	2
31		17 2 54.53	+ 0 11 3.7			

Les observations d'Eucharis faites en 1885 ont été comparées aux éléments (II). En réunissant dans une moyenne les différences : observation-calcul, qui résultent des deux premières observations, on trouve :

DATES.	Observ.-calc. $\Delta\alpha \cos\delta$.	$\Delta\delta$.	Étoile.	Poids.
1885 juin 19.9	$-0^s.135$	$-0''.2$	31	$1\frac{1}{2}$
» juillet. 10.5	-0.11	-1.0	30	1
» » 15.4	$+0.18$	-1.8	29	1

D'après les éléments (II) la position d'Eucharis rapportée à l'équinoxe moyen 1890.0 est pour

1885 juillet. . . 3.5 $\alpha = 254^\circ 2' 18''.92$ $\delta = -0^\circ 22' 6''.48$.

En ajoutant à cette position la moyenne des corrections données ci-dessus $\Delta\alpha = -0''.56$, $\Delta\delta = -0''.89$, on trouve la position normale rapportée à l'équinoxe moyen 1890.0 :

1885 juillet. . . 3.5 $\alpha = 254^\circ 2' 18''.36$ $\delta = -0^\circ 22' 7''.37$.

OBSERVATIONS D'EUCHARIS FAITES EN 1886.

Temps moyen de Berlin — Temps de l'aberration.	Observatoire.	N° de l'étoile.	α (181) obs.	δ (181) obs.
Juin 22.4676	Nice	42	20h 52m 43s.20	− 7° 55′ 16″.9
» 25.4711	»	43	20 51 34.16	− 8 3 15.6
» 25.5060	Alger.	40	20 51 33.38	− 8 3 21.1
» 26.4884	Nice	43	20 51 8.64	− 8 6 10.5
» 27.4665	»	41	20 50 43.16	− 8 9 4.9
» 28.4785	Alger.	40	20 50 16.31	− 8 12 12.1
» 28.5369	Paris.	40	20 50 14.22	− 8 12 24.2
» 29.5530	»	39	20 49 45.69	− 8 15 38.9
Août 6.4562	»	38	20 24 47.74	− 11 27 47.3
» 20.3972	Berlin	36	20 15 28.60	− 12 55 31.2
» 25.4468	»	37	20 12 36.76	− 13 26 33.1
» 28.4151	Nice	35	20 11 5.97	− 13 44 22.2

Temps moyen de Berlin — Temps de l'aberration.		Observatoire.	Nº de l'étoile.	α (181) obs.	δ (181) obs.
Août	29.3786	Nice	35	20h 10m 38s.09	- 13 50 5.6
»	31.3990	Vienne	33	20 9 42.93	- 14 1 53.2 *
Sept.	1.3340	»	32	20 9 19.10	- 14 7 17.4 *
»	2.3259	»	34	20 8 54.65	- 14 12 59.1 *

* Observations faites au moyen d'un micromètre circulaire. — Le 2 septembre l'observation a été troublée par une petite étoile qui se trouvait dans le voisinage de la planète.

POSITIONS DES ÉTOILES DE COMPARAISON.

Nº de l'étoile.	Autorités.	α (1886.0).	δ (1886.0).	Époques.	Nombre des observations.	Poids.
	AN.	20h 6m 25s.06	- 14° 7′ 50″.2	60.7	2	1
	P.	24.91	51.7	67.2 65.0	2.3	1
	Y.	25.00	52.7	71.9 66.2	8	2
	T.	25.08	53.6	86.7	3	2
	S.	24.93	52.8	87.7	1	1
32		20 6 25.01	- 14 7 52.5			
	Y.	20 6 57.72	- 14 1 16.4	69.3 56.4	3	
	T.	57.77	11.7	86.7	2	1
	S.	57.70	14.9	87.7	5	2
33		20 6 57.72	- 14 1 14.5			
	Schj.	20 7 47.33	- 14 14 8.2		1	1
	T.	47.14	10.2	86.7	3	2
	S.	47.12	10.0	87.7	7	4
34		20 7 47.16	- 14 14 9.8			
	Schj.	20 8 45.95	- 13 43 43.3		1	1
	P.	45.86	43.4	64.4 65.7	4.3	2
	Y.	45.68	42.0	68.8 61.2	2	1
	Cord.	45.81	43.3	77.8	4	2
	T.	45.88	43.6	86 7	3	2
	S.	45.80	43.3	87 7	9	4
35		20 8 45.83	- 13 43 43.3			

N° de l'étoile.	Autorités.	α (1886.0).	δ (1886.0).	Époques.	Nombre des observations.	Poids.
36	α_2 Capricorni (Berliner astron. Jahrbuch).					
37	Kr.	20h 13m 20s.04	− 13° 26′ 14″.0	86.7	2	
	Kr.	20 22 22.02	− 11 27 54.4	86.7	2	1
	T.	22.02	54.8	86.7	5	1
38		20 22 22.02	− 11 27 54.6			
	M.	20 48 53.11	− 8 14 3.5		1	1
	Bi [1]	53.22	2.5			1
	Kr.	53.21	2.6	86.7	2	2
	T.	53.22	2.0	86.7	3	2
39		20 48 53.20	− 8 14 2.5			
	Schj.	20 50 1.09	− 8 9 2.5		1	1
	[2]	1.23	4.9	86.7		2
	T.	1.15	4.7	86.7	4.3	3
	S.	1.23	5.0	87.7	5.9	4,5
40		20 50 1.19	− 8 9 4.7			
	P.	20 51 34.35	− 8 9 6.2	65.2	2	2
	Schj.	34.30	6.1		1	1
	T.	34.40	7.0	86.7	4	3
41		20 51 34.37	− 8 9 6.6			
42	[3]	20 52 50.33	− 7 54 21.0			
	Schj.	20 53 21.61	− 8 3 58.0		1	1
	T.	21.58	61.1	86.7	4	3
	S.	21.52	61.1	87.7	5.9	4,5
43		20 53 21.55	− 8 4 0.8			

[1] L'étoile a été comparée au n° 40. [2] L'étoile a été comparée au n° 41. [3] L'étoile a été comparée au n° 43.

Les observations d'Eucharis faites en 1886 ont été comparées aux éléments (II). En réunissant dans une moyenne les différences : observa-

tion-calcul, qui se rapportent à une même étoile de comparaison, on trouve :

DATES.	Observ.-calcul. $\Delta\alpha \cos\delta$.	$\Delta\delta$.	Étoile.	Nombre des différ.	Poids.
1886 juin. 22.5	- 0s.18	[+ 7".7]	42	1	½.0
» » 25.5	+ 0.015	+ 0.8	43	2	1 ½
» » 27.0	+ 0.06	+ 0.6	40	3	2
» » 27.5	- 0 11	+ 0.5	41	1	1
» » 29.5	- 0.37	+ 1.4	39	1	1
» août. 6.5	- 0.07	- 0.8	38	1	1
» » 20.4	- 0.15	- 2.2	36	1	1
» » 25 4	- 0.08	- 0.4	37	1	1
» » 28.9	- 0.095	- 0.65	35	2	1 ½
» » 31.4	- 0.10	- 0.1	33	1	½
» sept. 1.3	+ 0.16	- 0.6	32	1	½
» » 2.3	+ 0.33	- 2.0	34	1	½

La moyenne des corrections résultant des observations faites au mois de juin est $\Delta\alpha = -1''.09$, $\Delta\delta = +0''.78$.

Les autres observations donnent $\Delta\alpha = -0''.88$, $\Delta\delta = -0''.90$. D'après les éléments (II) les coordonnées d'Eucharis rapportées à l'équinoxe moyen 1890.0 sont pour

$$1886 \text{ juin } 27.5 \quad \alpha = 312^\circ 43' 29''.67 \quad \delta = -\ 8^\circ\ 8' 26''.73,$$
$$\text{» août } 26.5 \quad \alpha = 303\quad 3\ 50.46 \quad \delta = -13\ 32\ 20.76.$$

En ajoutant à la première position les corrections résultant des observations faites au mois de juin et à la seconde les corrections déduites des observations faites aux mois d'août et de septembre, on trouve les positions normales d'Eucharis, rapportées à l'équinoxe moyen 1890.0 :

$$1886 \text{ juin } 27.5 \quad \alpha = 312^\circ 43' 28''.58 \quad \delta = -\ 8^\circ\ 8' 25''.95,$$
$$\text{» août } 26.5 \quad \alpha = 303\quad 3\ 49.58 \quad \delta = -13\ 32\ 21.66.$$

Par suite de renseignements donnés par M. Trépied, deux observations faites à l'Observatoire d'Alger au mois de septembre ont dû être rejetées.

OBSERVATIONS D'EUCHARIS FAITES EN 1887.

Temps moyen de Berlin — Temps de l'aberration.	Observatoires.	Numéro de l'étoile.	α (181) obs.	δ (181) obs.
Oct. 21.4565	Berlin	47	1h 52m 51s.04	− 16° 21′ 44″2
» 25.1605	»	46	1 9 46.25	− 16 42 58.2
» 26.5162	Vienne	»	1 9 5.51	− 16 47 17.4
Nov. 5.5860	Nice	45	1 5 10.75	− 17 17 51.4
» 9.5157	»	»	1 1 15.40	− 17 22 5.6
» 10.5597	»	»	1 0 47.95	− 17 22 52.5
» 11.5118	»	44	1 0 25.11	− 17 22 46.9

POSITIONS DES ÉTOILES DE COMPARAISON.

No de l'étoile.	Autorités.	α (1887.0).	δ (1887.0).	Époques.	Nombre des observations.	Poids.
	Bord. [1]	0h 57m 57s.88	− 17° 11′ 10″.2	85.3	2	2
	S.	57.99	8 7	87.9	1	1
44		0 57 57.92	− 17 11 9.7			
	Bord. [1]	1 0 5.06	− 17 12 24.9	82.8	1	1
	S.	4.98	25.6	87.9	2.1	2.1
45		1 0 5.01	− 17 12 25.2			
46	S.	1 8 58 21	− 16 45 16.7	87.9	1.2	
	Br. [2]	1 14 24 55	− 16 24 16.2	70.6 67.9	5.2	1
	Cord.	24.40	16.4	77.4	5	2
47		1 14 24.58	− 16 24 16.5			

[1] M. Rayet a bien voulu me faire connaître les étoiles fondamentales, dont il s'est servi pour déterminer les positions des deux étoiles. Afin que ces dernières se rapportent au système du AGCII je les ai corrigées de $\Delta\alpha = +0^s.04$, $\Delta\delta = -0''5$

[2] La moyenne des différences AGCII — Br pour les sept étoiles communes à ces deux catalogues entre 0^h et 3^h est $\Delta\alpha = +0^s06$. $\Delta\delta = -0''.8$; ces quantités ont été ajoutées aux positions prises du nouveau catalogue de Bruxelles.

Les observations d'Eucharis faites en 1887 ont été comparées aux élé-

ments (III). En réunissant dans une moyenne les différences : observation-calcul, qui se rapportent à une même étoile, on trouve :

DATES.	Observ.-calcul.		Étoile.	Nombre des différ.	Poids.
	$\Delta\alpha \cos\delta$.	$\Delta\delta$.			
1888 oct. 21.5	$-0^s.59$	$-2''.6$	47	1	1
» » 26.0	-0.59	-4.4	46	2	$1\frac{1}{2}$
» nov. 8.5	-0.42	-3.9	45	3	2
» » 11.5	-0.57	-5.7	44	1	1

D'après les éléments (III) la position d'Eucharis rapportée à l'équinoxe moyen 1890.0 est pour

1887 nov. 2.5 $\alpha = 16^h 15' 18''.17$ $\delta = -17° 10' 32''.49$.

En ajoutant à cette position la moyenne des corrections données ci-dessus $\Delta\alpha = -7''.38$, $\Delta\delta = -3''.76$, on aura la position normale d'Eucharis rapportée à l'équinoxe moyen 1890.0.

1887 nov. 2.5 $\alpha = 16^h 15' 10''.79$ $\delta = -17° 10' 36''.25$.

CORRECTION DES ÉLÉMENTS (III).

Dans ce qui précède nous avons déterminé dix positions normales d'Eucharis, les voici :

Temps moyen de Berlin.	Équinoxe moyen : 1880.0					
	α.			δ.		
1887 février 11.5	149°	4'	55''.24	+ 12°	53'	25'' 85
» mars 29.5	143	39	58.25	+ 19	56	30.89
1879 juin 1.5	229	35	56.91	+ 7	42	9.83
1880 juin 12.5	286	19	22.71	− 4	58	21.05
1881 septembre 17.5	335	44	12.86	− 16	56	35.91
1883 janvier. 5.5	75	55	17.18	− 2	27	46.75

Temps moyen de Berlin.	Équinoxe moyen : 1890.0 α.			δ.		
1883 juillet 3.5	254°	2′	18″.36	− 0°	22′	7″.37
1886 juin 27.5	312	43	28.58	− 8	8	23.95
» août 26.5	303	3	49.38	− 13	32	21.66
1887 novembre. 2.5	16	13	10.79	− 17	10	36.23

Ces positions normales diffèrent des positions d'Eucharis, calculées à l'aide des éléments (III) et en tenant compte des perturbations exercées par Jupiter, Saturne et Mars, des quantités qui suivent :

DATES.	ÉLÉMENTS III. Observ.-calcul. $\Delta\alpha \cos\delta$.	$\Delta\delta$.	ÉLÉMENTS IV. Observ.-calcul. $\Delta\alpha \cos\delta$.	$\Delta\delta$.
1878 février 11.5	+ 4″.92	+ 0″.41	+ 0″.23	− 0″.22
» mars. 29.5	+ 2.68	+ 0.16	− 1.18	− 0.80
1879 juin 1.5	+ 3.34	− 1.31	+ 1 96	− 1.95
1880 juin 12.5	− 2.13	+ 1.83	− 1.68	+ 1.33
1881 septembre 17.5	− 1.20	− 1.30	+ 0.42	− 0.57
1883 janvier 5.5	− 0.04	+ 0.68	+ 1.68	+ 1.77
1883 juillet 3.5	− 1.10	+ 0.80	+ 0.66	− 0.22
1888 juin 27.5	− 3.31	+ 0.79	+ 0.09	+ 0.83
» août 26.5	− 3.06	+ 1.11	+ 0.24	− 1.08
1887 novembre 2.5	− 7.05	− 3.76	− 0.97	− 1.63

Les coefficients des équations de condition ont été calculées au moyen des formules déduites par M. Schönfeld.

Posons :

$$dk = d\omega + \cos i d\Omega,$$
$$dk_2 = dk + \sec^3 \varphi dM_0,$$
$$d\lambda = \sin \omega di - \cos \omega \sin i d\Omega,$$
$$d\nu = \cos \omega di + \sin \omega \sin i d\Omega,$$

les équations de condition sont de la forme :

$$\text{ou} \left.\begin{array}{c}\Delta\alpha\cos\delta \\ \Delta\delta\end{array}\right\} + v = A dk_2 + B \operatorname{tg} \varphi dM_0 + C d\mu + D d\varphi + E d\lambda + F d\nu$$

Voici les logarithmes des coefficients ainsi que ceux des différences $\Delta\alpha \cos \delta$ et $\Delta\delta$, ces différences prises dans le sens : observation-calcul :

1. Ascensions droites.

Log A.	Log B.	Log C.	Log D.	Log E.	Log F.	Log $\Delta\alpha \cos\delta$.	Poids.
0.2069	0.3618	3.4644_n	0.4360	8.4000	8.4742	0.6922	9
0.1282	0.2572	3.3797_n	0.3688	7.2228	7.4804	0.4279	6
0.1097	0.2426_n	2.9248_n	0.2582	9.3488_n	9.3183	0.5257	1
0.1128	0.3830_n	2.5436_n	9.3883_n	9.2373_n	8.0195_n	0.3329_n	1
0.1432	0.1340_n	1.0012_n	0.3744_n	8.4988	8.8018	0.0776_n	2
0.1616	0.5096	3.0271	0.0127_n	9.5950_n	8.8136	8.6017_n	2
0.1003	0.3493_n	3.0648	9.8866	9.4268_n	8.8928	0.0414_n	2
0.1095	0.3254_n	3.2162	0.0800_n	8.6802_n	8.3767_n	0.3195_n	4
0.1172	0.3362_n	3.2150	0.0901_n	8.9357_n	8.7654_n	0.4860_n	4
0.1444	9.7597	3.5616	0.4612_n	8.8258_n	9.4048	0.8481_n	4

2. Déclinaisons.

Log A.	Log B.	Log C.	Log D.	Log E.	Log F.	Log $\Delta\delta$.	Poids.
8.3884_n	8.6572_n	1.8190	8.8592_n	0.0162	0.0904	9.6128	18
8.3886	9.0694_n	1.1531	9.2010	9.8252	0.0828	9.2041	12
9.4577_n	9.4676	2.3791	9.6869_n	9.9727_n	9.9421	0.1173_n	2
9.2855_n	9.5633	1.9017	8.8427_n	0.1122_n	8.8744_n	0.2672	2
8.7799	9.1503_n	1.3320_n	8.7964_n	9.7934_n	0.0965_n	0.1761_n	4
9.4429	9.7542	2.1930	9.6404_n	0.1586	9.4672_n	9.8525	4
9.4197_n	9.6160	2.3379_n	9.3796_n	0.0846_n	9.5505	9.9031	4
8.8406_n	9.1940	1.6775_n	8.2668_n	0.0648_n	9.7614_n	9.8976	8
9.0274_n	9.2162	2.1569_n	9.0688	0.0403_n	9.8700_n	0.0455_n	8
9.3382	9.1813_n	2.6255	9.7296_n	9.3488	0.1278_n	0.5752_n	8

En traitant ces équations de condition d'après la méthode des moindres carrés, on trouvera les corrections suivantes des éléments (III) :

$dM_0 = +0''.62$ erreur moyenne $\pm 1''.20$,
$d\omega = +0.31$ » ± 1.77,
$d\Omega = -1.42$ » ± 1.17,
$di = +0.85$ » ± 0.38,
$d\varphi = +0.46$ » ± 0.38,
$d\mu = -0.00126$ » ± 0.00055.

En ajoutant ces corrections aux éléments (III), on aura les

ÉLÉMENTS (IV) DE LA PLANÈTE EUCHARIS.

Osculation et époque : 1881 août 31.0 temps moyen de Berlin.

$$\left.\begin{aligned} M &= 264^\circ 58' 51''.7 \\ \omega &= 310\ 51\ \ 8.2 \\ \Omega &= 144\ 46\ \ 1.8 \\ i &= 18\ 53\ 29.2 \end{aligned}\right\} \text{Équinoxe moyen 1880.0.}$$

$$\varphi = 12\ 44\ \ 4''.6,$$

$$\mu = 644''.50158,$$

$$\log a = 0.4958551.$$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 310^\circ 51' 15''.57 \\ \Omega &= 144\ 54\ 17.45 \\ i &= 18\ 53\ 24.99 \end{aligned}\right\} \text{Équinoxe moyen 1890.0.}$$

J'ai déjà fait connaitre pour les dix positions normales les erreurs : observation-calcul, correspondant aux éléments (IV). Voici encore les constantes dont on a besoin pour calculer les coordonnées rectangulaires de la planète rapportées à l'équateur (Oppolzer, *l. c.*, p. 162).

Équinoxe moyen 1880.0.	Équinoxe moyen 1890.0.
$A = 256^\circ 12'\ \ 2'',44$	$A = 256^\circ 20'\ \ 7''.94$
$B = 147\ \ 41\ \ 55.02$	$B = 147\ \ 49\ \ 24.90$
$C = 95\ \ 54\ \ 17.14$	$C = 94\ \ 2\ \ 54\ \ 57$
$\log \sin a = 9.9925271$	$\sin a = 9.9925797$
$\log \sin b = 9.9958029$	$\sin b = 9.9958279$
$\log \sin c = 9.5620224$	$\sin c = 9.5605958$
$\log \cos a = 9.2646454$	cn $a = 9.2651557$
$\log \cos b = 9.1410050_n$	cn $b = 9.1597159_n$
$\log \cos c = 9.9881815$	cn $c = 9.9882612$

DÉMONSTRATION PRATIQUE

DE

L'EXISTENCE DE LA NUTATION DIURNE,

PAR

L. NIESTEN,

ASTRONOME A L'OBSERVATOIRE ROYAL DE BRUXELLES.

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 5 mars 1887.)



DÉMONSTRATION PRATIQUE

DE

L'EXISTENCE DE LA NUTATION DIURNE.

Malgré la précision avec laquelle les observations méridiennes se font de nos jours et malgré le soin avec lequel ces observations sont réduites, il existe, dans les principaux catalogues d'étoiles, des différences considérables pour les étoiles circompolaires, entre les positions observées et celles qu'indique le calcul. La nutation diurne étant prouvée théoriquement dans le savant mémoire de M. Folie : *Théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du monde*, il était du plus grand intérêt de rechercher si ces différences, qui se montent à plusieurs secondes pour les étoiles voisines du pôle, ne pouvaient s'expliquer par le fait de termes dépendant de la nutation diurne et dont jusqu'ici les astronomes n'avaient pas tenu compte dans la réduction de la position apparente des astres à leur position moyenne.

C'est dans ce but qu'a été entrepris le travail que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie.

Si la valeur obtenue pour le coefficient de la nutation diurne doit être considérée comme une valeur approchée qu'une longue série d'observations, faites dans le but spécial de la mettre en évidence, viendra améliorer, toutefois la concordance des diverses valeurs trouvées pour ce coefficient, par des séries d'observations faites dans différents observatoires, doit permettre de conclure avec une très grande probabilité à la réalité de l'existence de la nutation diurne.



Dans le mémoire cité plus haut, M. Folie est conduit aux formules suivantes, pour les variations apparentes du lieu d'un astre produites par le mouvement diurne de l'axe du monde :

(1) . . . . $\Delta\delta = \sin\alpha\Delta\omega + \cos\alpha\sin\omega\Delta\psi.$

(2) . . . . $\Delta\alpha = \cos\omega\Delta\psi + \operatorname{tg}\delta(\sin\alpha\sin\omega\Delta\psi - \cos\alpha\Delta\omega).$

où α et δ sont l'ascension droite et la déclinaison de l'astre, $\Delta\alpha$ et $\Delta\delta$ les variations apparentes de ces coordonnées dues au mouvement de l'axe du monde, et dans lesquelles

$$(3)\ \Delta\omega = -K\left[\frac{\cos(A+2D-2\varphi)}{(s_2-\beta)(s_2-1)} - \frac{\cos(A-2D-2\varphi)}{(r_2-\beta)(r_2-1)}\right] - Kf\left[\frac{\cos(A'+2D'-2\varphi)}{(s'_2-\beta)(s'_2-1)} - \frac{\cos(A'-2D'-2\varphi)}{(r'_2-\beta)(r'_2-1)}\right].$$

$$(4)\ \sin\omega\Delta\psi = K\left[\frac{\sin(A+2D-2\varphi)}{(s_2-\beta)(s_2-1)} - \frac{\sin(A-2D-2\varphi)}{(r_2-\beta)(r_2-1)}\right] + Kf\left[\frac{\sin(A'+2D'-2\varphi)}{(s'_2-\beta)(s'_2-1)} - \frac{\sin(A'-2D'-2\varphi)}{(r'_2-\beta)(r'_2-1)}\right].$$

Dans les formules (3) et (4)

A et D = ascension et déclinaison du Soleil.

A′ et D′ = ascension et déclinaison de la Lune.

φ = l'angle que l'axe des x fait, dans le sens du mouvement de rotation de la Terre, avec la ligne équinoxiale, ou réduit en temps, l'heure sidérale du premier méridien, en prenant pour premier méridien celui qui passe par l'axe des x.

$\beta = \frac{b}{A} = 0{,}0033$ et $f = 2{,}18$.

$s_2 = a_2 + 2\delta_2 - 1$ ⎫ $a_2 = \frac{a_1}{n}$ rapport du mouvement en ascension droite du Soleil pendant 1 jour sidéral à 360°.

$r_2 = a_2 - 2\delta_2 - 1$ ⎭ $\delta_2 = \frac{\delta_1}{n}$ rapport du mouvement en déclinaison.

$s'_2 = a'_2 + 2\delta'_2 - 1$, $r'_2 = a'_2 - 2\delta'_2 - 1$ } rapport pour les mouvements de la Lune.

La formule (2), que nous emploierons particulièrement dans cette étude,

devient en y remplaçant $\Delta\omega$ et $\Delta\psi$ par leurs valeurs (3) et (4) et en remplaçant S par $(s_2 - \beta)(s_2 - 1)$ et R par $(r_2 - \beta)(r_2 - 1)$

$$
(5) \; . \; . \; . \; . \quad \left|
\begin{aligned}
&\Delta\alpha = \frac{\cos\psi}{\sin\omega} K \left\{ \frac{\sin(A + 2D - 2\varphi)}{S} + \frac{\sin(A - 2D - 2\varphi)}{R} \right\} \\
&+ K \operatorname{tg}\delta \left\{ \frac{\cos(A + 2D - \alpha - 2\varphi)}{S} - \frac{\cos(A - 2D - \alpha - 2\varphi)}{R} \right\} \\
&+ fK \cot\omega \left\{ \frac{\sin(A' + 2D' - 2\varphi)}{S'} - \frac{\sin(A' - 2D' - 2\varphi)}{R'} \right\} \\
&+ fK \operatorname{tg}\delta \left\{ \frac{\cos(A' + 2D' - \alpha - 2\varphi)}{S'} - \frac{\cos(A' - 2D' - 2\varphi)}{R'} \right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans cette expression, outre l'inconnue K, il existe une autre inconnue renfermée dans φ, c'est L, la longitude orientale du lieu d'observation par rapport au premier méridien.

En effet, à l'heure φ correspond l'heure sidérale $\varphi + L = T$, pour un lieu d'observation dont la longitude orientale est L par rapport au premier méridien. Remplaçant dans (5) φ par $T - L$

$$
\begin{aligned}
\Delta\alpha = \cot\omega \Big\{ & K \cos 2L \left[\frac{\sin(A + 2D - 2T)}{S} - \frac{\sin(A - 2D - 2T)}{R} \right] \\
& + K \sin 2L \left[\frac{\cos(A \quad 2D - 2T)}{S} - \frac{\cos(A - 2D - 2T)}{R} \right] \Big\} \\
+ \operatorname{tg}\delta \Big\{ & K \cos 2L \left[\frac{\cos(A + 2D - \alpha - 2T)}{S} - \frac{\cos(A - 2D - \alpha - 2T)}{R} \right] \\
& - K \sin 2L \left[\frac{\sin(A + 2D - \alpha - 2T)}{S} - \frac{\cos(A - 2D - \alpha - 2T)}{R} \right] \Big\} \\
+ f \cot\omega \Big\{ & K \cos 2L \left[\frac{\sin(A' + 2D' - 2T)}{S'} - \frac{\sin(A' - 2D' - 2T)}{R'} \right] \\
& + K \sin 2L \left[\frac{\cos(A' - 2D' - 2T)}{S'} - \frac{\cos(A' - 2D' - 2T)}{R'} \right] \Big\} \\
+ f \operatorname{tg}\delta \Big\{ & K \cos 2L \left[\frac{\cos(A' + 2D' - \alpha - 2T)}{S'} - \frac{\cos(A' - 2D' - \alpha - 2T)}{R'} \right] \\
& - K \sin 2L \left[\frac{\sin(A' + 2D' - \alpha - 2T)}{S'} - \frac{\sin(A' - 2D' - \alpha - 2T)}{R'} \right] \Big\}.
\end{aligned}
$$

Si l'on pose $y = \text{K} \cos 2\text{L}$ et $x = \text{K} \sin 2\text{L}$, on aura :

$$
\begin{aligned}
\Delta\alpha = y & \left\{ \left[\frac{1}{S} \sin(A + 2D - 2T) - \frac{1}{R} \sin(A - 2D - 2T) \right] \cot \omega \right\} \\
+ x & \left\{ \left[\frac{1}{S} \cos(A + 2D - 2T) - \frac{1}{R} \sin(A - 2D - 2T) \right] \cot \omega \right\} \\
+ y & \left\{ \left[\frac{1}{S'} \sin(A' + 2D' - 2T) - \frac{1}{R'} \sin(A' - 2D' - 2T) \right] f \cot \omega \right\} \\
+ x & \left\{ \left[\frac{1}{S'} \cos(A' + 2D' - 2T) - \frac{1}{R'} \sin(A' - 2D' - 2T) \right] f \cot \omega \right\} \\
+ y & \left\{ \left[\frac{1}{S} \cos(A + 2D - \alpha - 2T) - \frac{1}{R} \cos(A - 2D - \alpha - 2T) \right] \operatorname{tg} \delta \right\} \\
- x & \left\{ \left[\frac{1}{S} \sin(A + 2D - \alpha - 2T) - \frac{1}{R} \sin(A - 2D - \alpha - 2T) \right] \operatorname{tg} \delta \right\} \\
+ y & \left\{ \left[\frac{1}{S'} \cos(A' + 2D' - \alpha - 2T) - \frac{1}{R'} \cos(A' - 2D' - \alpha - 2T) \right] f \operatorname{tg} \delta \right\} \\
- x & \left\{ \left[\frac{1}{S'} \sin(A' + 2D' - \alpha - 2T) - \frac{1}{R'} \sin(A' - 2D' - \alpha - 2T) \right] f \operatorname{tg} \delta \right\}.
\end{aligned}
$$

Si dans une série d'observations, on compare l'observation de l'ascension droite moyenne calculée A à l'ascension droite observée A_0, on pourra former autant d'équations de condition de la forme

$$A + (\Delta\alpha)\, y + [\Delta\alpha]\, x - A_0 = 0,$$

qu'on aura d'observations, d'où l'on pourra tirer la valeur de $y = \text{K} \cos 2\text{L}$ et $x = \text{K} \sin 2\text{L}$, et par suite les valeurs de K et de L.

Si l'on applique les formules précédentes, on trouve :

	K.	L.	
1° Par 38 observations de la *Polarissime* faites à Kiew en 1870, on trouve.	— 0",209	42° 32'	W. de Greenwich.
2° Par 63 observations de α *Ursae majoris* faites à Pulkowa en 1861, 1862, 1868, 1869 et 1870.	— 0,181	6°	—
3° Par 73 observations de α *Ursae majoris* faites à Greenwich en 1869	— 0,124	28°	—
4° Par 57 observations de α *Ursae majoris* faites à Washington en 1870	— 0,175	8°	E. de Greenwich.
5° Par 16 observations de δ *Ursae majoris* faites à Pulkowa en 1869	— 0,321	52°	W. de Greenwich.
6° Par 22 observations de λ *Ursae minoris* faites à Bruxelles en 1861 et 1862	— 0,100	26°	—
7° Par 12 observations de σ *Octantis* faites à Cordoba en 1874	— 0,110	26°	—
8° Par les observations de R *Cephei* faites à Bonn en 1863 et 1864.	— 0,136	17°	—

La moyenne de ces déterminations donnerait :

K = — 0",169 et L = 24° W. de Greenwich.

POLARISSIME (Kiew, 1870).

Dans le vol. II des *Annales de l'Observatoire de Kiew* se trouvent renseignées les observations de la *Polarissime* dont l'ascension droite moyenne au 1er janvier 1886 est $18^h 11^m 14^s$ et dont la distance polaire est $0° 5' 41'',10$. Les différences entre les positions observées et celles calculées sont données en coordonnées rectilignes. Nous avons donc dû, en premier lieu, convertir en coordonnées polaires les valeurs observées et les valeurs calculées, données en coordonnées rectilignes. Le détail des calculs se trouve renseigné au tableau *A*.

De toutes les observations qui ont été faites dans une même soirée, nous n'avons utilisé que celles qui correspondaient au passage au méridien.

Le tableau *B* donne les détails du calcul des termes relatifs au Soleil et à la Lune :

$$S = (s_1 - 1)\left(s_1 - \frac{b}{A}\right)$$

et

$$R = (r_1 - 1)\left(r_1 - \frac{b}{A}\right).$$

Le tableau *C* donne les valeurs des ascensions droites et des déclinaisons du Soleil et de la Lune pour les instants des observations et celles des valeurs des termes

$$\begin{array}{lcl} \sin(A + 2D - 2T) & \multirow{2}{*}{et} & \sin(A - 2D - 2T) \\ \cos(A' + 2D' - 2T) & & \cos(A' - 2D' - 2T) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \sin(A + 2D - \alpha - 2T) & \multirow{2}{*}{et} & \sin(A - 2D - \alpha - 2T) \\ \cos(A' + 2D' - \alpha - 2T) & & \cos(A' - 2D' - \alpha - 2T) \end{array}$$

et aussi celles de

$$\cot\omega \left\{\frac{\sin(A + 2D - 2T)}{S} - \frac{\sin(A - 2D - 2T)}{R}\right\}$$

$$\cot\omega \left\{\frac{\cos(A - 2D - 2T)}{S} - \frac{\cos(A - 2D - 2T)}{R}\right\}$$

et

$$\operatorname{tg}\delta \left\{\frac{\sin(A + 2D - \alpha - 2T)}{S} - \frac{\sin(A - 2D - \alpha - 2T)}{R}\right\}$$

$$\operatorname{tg}\delta \left\{\frac{\cos(A + 2D - \alpha - 2T)}{S} - \frac{\cos(A - 2D - \alpha - 2T)}{R}\right\},$$

et les termes analogues relatifs à la Lune.

Le tableau *D* donne enfin la formation des coefficients de x et de y dans les équations de condition correspondantes aux observations.

N. B. — Nous avons donné en détail les calculs relatifs à la *Polarissime ;* pour les autres étoiles, nous n'avons transcrit que les éléments qui servent de baseau calcul.

Équations de condition.

A+1118.006	y — 598.513	x + 63 = 0.		A+ 290.766	y —1311.921	x + 122 = 0.	
771.237	—1057.142	+ 86		255.774	— 774.876	+ 423	
439.287	—1134.771	+ 318		570.307	— 763.996	+ 456	
348.028	—1060.645	+ 199		453.781	— 549.034	+ 434	
1298.262	+ 270.495	+ 173		674.328	+ 30.670	+ 357	
1374.067	+ 52.431	+ 417		896.050	+ 7.573	+ 50	
1202.247	— 515.499	+ 346		1060.770	+ 203.956	+ 823	
700.855	—1935.064	+ 391		1358.928	+ 70.285	+ 489	
832.092	+ 167.490	— 49		842.000	+ 68.970	+1134	
430.594	— 540.887	+ 33		239.527	— 658.033	+ 85	
328.065	— 935.665	+ 321		364.016	— 287.772	— 90	
1272.918	+ 477.079	— 62		65.470	— 181.819	+ 90	
234.909	—1591.973	+ 362		617.774	— 420.511	+ 402	
1683.494	— 596.190	— 269		856.130	— 124.904	+ 470	
480.363	— 0.182	+ 665		1093.660	— 452.930	+ 665	
601.721	+ 384.753	+ 6		495.600	— 562.518	+ 575	
821.161	+ 417.250	+ 801		316.609	— 505.638	+ 314	
1027.975	+ 345.637	+ 443		177.553	— 450.021	+1027	
A+1312.707	+ 162.174	+ 449 = 0.		A+ 358.781	+ 223.233	+ 578 = 0.	

Avec ces équations de condition on peut former les équations normales suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rl} 38\ A + 27325.75\ y - 14120.40\ x + 13079 &= 0 \\ 27.32575\ A + 24336\ y - 6375\ x + 9015 &= 0 \\ -14.12040\ A - 6375\ y + 19351\ x - 3951 &= 0. \end{array}\right.$$

qui donneront les valeurs suivantes :

$$A = -31^s,9 \qquad \log x = \bar{1}.0497451_n \qquad \log y = \bar{1}.2465724,$$

d'où l'on déduit :

$$K = -0'',209 \quad \text{et} \quad L = 73^\circ\ 46'\ 50''\ \text{W. de Kiew.}$$
$$= 42^\circ\ 32'\ \text{W. de Greenwich.}$$

TABLEAU A.

Valeurs de Observation — Calcul en Ascension droite.

Nº d'ordre.	DATES.			OBSERVATION — CALCUL. Coordonnée rectiligne.	Coordonnée polaire.
1	1879.	Mai	21	- 0",12	- 63"
2		Juin	6	- 0,16	- 86
3			14	- 0,59	- 318
4			15	- 0,37	- 199
5			17	- 0,32	- 173
6			18	- 0,77	- 417
7			20	- 0,64	- 346
8			21	- 0,72	- 391
9			22	+ 0,09	+ 49
10			24	- 0,06	- 33
11			25	- 0,59	- 321
12		Juillet	1	+ 0,09	+ 62
13			2	- 0,66	- 362
14			4	+ 0,49	+ 269
15			7	- 1,21	- 665
16			11	- 0,01	- 6
17			12	- 1,45	- 801
18			13	- 0,80	- 443
19			15	- 0,81	- 449
20			18	- 0,22	- 122
21			19	- 0,76	- 423
22			20	- 0,82	- 456
23			21	- 0,78	- 434
24			25	- 0,64	- 357
25			26	- 0,09	- 50
26			27	- 1,47	- 823
27			30	- 0,87	- 489
28		Août	1	- 1,98	- 1134
29			3	- 0,15	- 85
30			4	+ 0,16	+ 90
31			5	- 0,16	- 90
32			8	- 0,71	- 402
33			9	- 0,83	- 470
34			12	- 1,17	- 665
35			16	- 1,01	- 575
36			17	- 0,55	- 314
37			18	- 1,80	- 1027
38			21	- 1,01	- 578

TABLEAU B.

Valeurs de $$\begin{cases} S_2 = (s_2 - 1)\left(s_2 - \frac{b}{A}\right) \\ R_2 = (r_2 - 1)\left(r_2 - \frac{b}{A}\right) \end{cases}$$

Nº d'ordre.	DATES.	a_1	$\frac{a_1}{n}$	$2d_1$	$\frac{2d_1}{n}$
			0,00		0,00
1	1879. Mai 21	+ 10",013	277	+ 61",12	113
2	Juin 6	10,300	285	+ 31,28	058
3	14	10,383	287	+ 15,12	028
4	15	10,390	288	+ 13,06	024
5	17	10,399	288	+ 8,92	016
6	18	10,402	288	+ 6,86	013
7	20	10,404	288	+ 2,72	005
8	21	10,404	288	- 0,66	001
9	22	10,402	288	- 1,42	003
10	24	10,395	288	- 3,54	007
11	25	10,390	288	- 7,60	014
12	Juillet 1	10,340	286	- 19,84	037
13	2	10,329	286	- 21,86	040
14	4	10,304	285	- 25,86	048
15	7	10,262	284	- 31,80	059
16	11	10,197	282	- 39,54	073
17	12	10,179	282	- 41,44	076
18	13	10,161	282	- 43,32	080
19	15	10,122	280	- 47,06	087
20	18	10,058	279	- 52,50	097
21	19	10,036	278	- 54,28	100
22	20	10,013	277	- 56,02	103
23	21	9,989	277	- 57,74	107
24	25	9,890	274	- 64,46	119
25	26	9,864	273	- 66,08	122
26	27	9,839	273	- 67,68	125
27	30	9,762	270	- 72,32	133
28	Août 1	9,710	269	- 75,32	139
29	3	9,660	268	- 78,22	144
30	4	9,635	267	- 79,64	147
31	5	9,610	266	- 81,04	149
32	8	9,538	264	- 85,08	157
33	9	9,515	264	- 86,38	159
34	12	9,445	262	- 90,12	166
35	16	9,357	259	- 94,72	174
36	17	9,335	259	- 95,82	177
37	18	9,314	258	- 96,88	179
38	21	9,252	256	- 99,86	184

TABLEAU B (*suite*).

Valeurs de
$$\begin{cases} S_2 = (s_2 - 1)\left(s_2 - \dfrac{b}{A}\right) \\ R_2 = (r_2 - 1)\left(r_2 - \dfrac{b}{A}\right) \end{cases}$$

Nº d'ordre.	DATES.			$s_2 - 1$	$s_2 - \frac{b}{A}$	log. S_2	$r_2 - 1$	$r_2 - \frac{b}{A}$	log. R_2
1	1879.	Mai	21.	- 1,99610	- 0,99938	+ 0,2999130	- 1,99836	- 1,00164	+ 0,3013767
2		Juin	6.	1,99657	0,99975	0,3001823	1,99773	1,00101	0,3009644
3			14.	1,99685	1,00013	0,3003997	1,99741	1,00069	7689
4			15.	1,99688	1,00016	0 3004432	1,99736	1,00064	7235
5			17.	1,99696	1,00024	0,3004650	1,99728	1,00056	7038
6			18.	1,99699	1,00027	0,3005984	1,99725	1,00053	6604
7			20.	1,99707	1,00035	0,3005735	1,99717	1,00045	6387
8			21.	1,99713	1,00041	0,3005735	1,99711	1,00039	5735
9			22.	1,99715	1,00043	0,3005953	1,99709	1,00037	5735
10			24.	1,99719	1,00047	0,3006387	1,99705	1,00033	5301
11			25.	1,99726	1,00054	0,3006604	1,99697	1,00025	5084
12		Juillet	1.	1,99751	1,00079	0,3008341	1,99677	1,00005	3780
13			2.	1,99754	1,00082	0,3008341	1,99674	1,00002	3346
14			4.	1,99763	1,00091	0,3008992	1,99667	0,99995	2911
15			7.	1,99775	1,00102	0,3009861	1,99657	0,99985	2260
16			11.	1,99791	1,00119	0,3010945	1,99645	0,99973	1520
17			12.	1,99794	1,00122	0,3010945	1,99642	0,99970	0,3001173
18			13.	1,99798	1,00126	0,3011597	1,99638	0,99966	0999
19			15.	1,99807	1,00135	0,3012248	1,99633	0,99961	0564
20			18.	1,99818	1,00146	0,3012900	1,99624	0,99952	0,2999956
21			19.	1,99822	1,00150	0,3012900	1,99622	0,99950	9869
22			20.	1,99826	1,00154	0,3013117	1,99620	0,99948	9782
23			21.	1,99830	1,00158	0,3013550	1,99616	0,99944	9608
24			25.	1,99845	1,00172	0,3014419	1,99607	0,99935	8999
25			26.	1,99849	1,00177	0,3014852	1,99695	0,99933	8912
26			27.	1,99852	1,00180	0,3014852	1,99602	0,99930	8564
27			30.	1,99863	1,00191	0,3015303	1,99597	0,99925	8347
28		Août	1.	1,99870	1,00198	0,3016153	1,99592	0,99920	7912
29			3.	1,99876	1,00204	0,3016370	1.99588	0,99916	7738
30			4.	1,99880	1,00208	0,3016804	1,99586	0,99914	7651
31			5.	1,99883	1,00211	0,3016804	1,99585	0,99913	7608
32			8.	1,99893	1,00221	0,3017455	1,99579	0,99907	7339
33			9.	1,99895	1,00223	0,3017672	1,99577	0,99905	7042
34			12.	1,99904	1,00232	0,3018105	1,99572	0,99900	6608
35			16.	1,99915	1,00243	0,3018973	1,99567	0,99895	6391
36			17.	1,99918	1,00246	0,3019406	1,99564	0,99892	6042
37			18.	1,99921	1,00249	0,3019406	1,99563	0,99891	5999
38			21.	- 1,99928	- 1,00256	+ 0,3020057	- 1,99560	- 0,99888	+ 0,2995868

TABLEAU B (*suite*).

Valeurs de $\begin{cases} S_2 = (s_2 - 1)\left(s_2 - \frac{b}{A}\right) \\ R_2 = (r_2 - 1)\left(r_2 - \frac{b}{A}\right) \end{cases}$

Nº d'ordre.	DATES.	a'_1	$\frac{a'_1}{n'}$	$2d'_1$	$\frac{2d'_1}{n'}$
			+0,0		0,0
1	1879. Mai 21	2,211	3675	+ 5,86	+ 0649
2	Juin 6	2,485	4130	− 15,92	− 1764
3	14	1,906	3168	+ 21,28	+ 2358
4	15	2,009	3339	+ 17,24	+ 1910
5	17	2,202	3660	+ 7,40	+ 0820
6	18	2,264	3763	+ 1,34	+ 0148
7	20	2,258	3753	− 11,36	− 1259
8	21	2,203	3662	− 17,04	− 1888
9	22	2,132	3544	− 22,04	− 2442
10	24	2,042	3394	− 28,60	− 3169
11	25	2,048	3404	− 30,04	− 3329
12	Juillet 1	2,709	4503	+ 3,86	+ 0428
13	2	2,694	4478	− 3,44	− 0382
14	4	2,450	4072	− 17,90	− 1983
15	7	1,938	3221	− 27,58	− 3056
16	11	1,900	3158	+ 22,10	+ 2449
17	12	1,976	3284	+ 18,66	+ 2068
18	13	2,071	3442	+ 14,50	+ 1607
19	15	2,247	3735	+ 3,60	+ 0399
20	16	2,255	3748	− 15,04	− 1667
21	19	2,190	3640	− 20,88	− 2314
22	20	2,126	3534	− 25,26	− 2799
23	21	2,078	3454	− 28,36	− 3142
24	25	2,257	3751	+ 26,30	+ 2914
25	26	2,389	3971	+ 21,68	+ 2402
26	27	2,523	4194	+ 15,14	+ 1678
27	30	2,564	4262	+ 9,74	+ 1079
28	Août 1	2,266	3766	− 22,32	− 2473
29	3	2,004	3331	− 27,38	− 3034
30	4	2,123	3529	− 25,54	− 2830
31	5	1,872	3111	+ 27,32	+ 3027
32	8	1,942	3228	+ 20,50	+ 2272
33	9	2,025	3366	+ 16,50	+ 1828
34	12	2,261	3758	+ 0,16	+ 0018
35	16	2,180	3623	− 23,78	− 2635
36	17	2,135	3549	− 27,70	− 3069
37	18	2,113	3512	− 30,20	− 3346
38	21	2,260	3756	+ 27,64	+ 3063

TABLEAU B (*suite*).

$$\textit{Valeurs de} \begin{cases} S_2 = (s_2 - 1)\left(s_2 - \dfrac{b}{A}\right) \\ R_2 = (r_2 - 1)\left(r_2 - \dfrac{b}{A}\right) \end{cases}$$

N° d'ordre.	DATES.			$(s_2 - 1)$	$\left(s_2 - \frac{b}{A}\right)$	log. S_2	$(r_2 - 1)$	$\left(r_2 - \frac{b}{A}\right)$	log. R_2
1	1879.	Mai	21.	- 1,95676	- 0,96004	+ 0,2738357	- 1,96974	- 0,97302	+ 0,2825219
2		Juin	6.	1,97634	0,97962	0,2869105	1,94106	0,94434	0,2631763
3			14.	1,94474	0,94802	0,2656701	1,99190	0,99518	0,2971691
4			15.	1,94751	0,95079	0,2665621	1,99571	0,99899	0,2996564
5			17.	1,95520	0,95848	0,2727743	1,97150	0,97478	0,2837034
6			18.	1,96089	0,96417	0,2766090	1,96585	0,96713	0,2786043
7			20.	1,97506	0,97834	0,2860789	1,94988	0,95316	0,2691781
8			21.	1,98226	0,98554	0,2908437	1,94450	0,94778	0,2755154
9			22.	1,98898	0,99226	0,2952603	1,94014	0,94342	0,2625292
10			24.	1,99775	1,00103	0,3009426	1,93437	0,93765	0,2585871
11			25.	1,99925	1,00253	0,3019524	1,93267	0,93595	0,2564170
12		Juillet	1.	1,95069	0,95397	0,2697252	1,95925	0,96253	0,2755152
13			2.	1,95904	0,96232	0,2753584	1,95140	0,95468	0,2702041
14			4.	1,97911	0,98239	0,2887516	1,93945	0,94273	0,2620771
15			7.	1,99835	1,00163	0,3013767	1,93723	0,94151	0,2609994
16			11.	1,94393	0,94721	0,2651202	1,99291	0,99619	0,2978277
17			12.	1,94648	0,94976	0,2668683	1,98784	0,99112	0,2944989
18			13.	1,94951	0,95279	0,2689204	1,98165	0,98493	0,2904214
19			15.	1,95866	0,96194	0,2751159	1,96664	0,96992	0,2804519
20			18.	1,97919	0,98247	0,2888090	1,94585	0,94913	0,2664462
21			19.	1,98674	0,99002	0,2937763	1,94046	0,94374	0,2627660
22			20.	1,99265	0,99593	0,2976707	1,93667	0,93995	0,2601672
23			21.	1,99688	1,00016	0,3004432	1,93404	9,93732	0,2583444
24			25.	1,93335	0,93663	0,2578898	1,99163	0,99491	0,2969859
25			26.	1,93627	0,93955	0,2598925	1,98431	0,98759	0,2922140
26			27.	1,94128	0,94456	0,2636223	1,97484	0,97812	0,2859152
27			30.	1,94659	0,94987	0,2669409	1,96817	0,97145	0,2814897
28		Août	1.	1,98707	0,99035.	0,2940084	1,93761	0,94089	0,2608030
29			3.	1,99703	1,00031	0,3005084	1,93635	0,93963	0,2599520
30			4	1,99301	0,99629	0,2978931	1,93641	0,93969	0,2599797
31			5.	1,93862	0,94190	0,2614930	1,99916	1,00244	0,3018756
32			8.	1,94500	0,94828	0,2658562	1.99044	0,99372	0,2962044
33			9.	1,94806	0,95134	0,2679470	1,98462	0,98790	0,2923860
34			12.	1,96224	0,96552	0,2775046	1,96250	0,96578	0,2774665
35			16.	1,99012	0,99340	0,2959991	1,93742	0,94070	0,2606704
36			17.	1,99520	0,99848	0,2992258	1,93382	0,93710	0,2581975
37			18.	1,99834	1,00162	0,3013550	1,93142	0,93470	0,2565444
38			21.	- 1,93181	- 0,93509	0,2568156	- 1,99307	0,99635	0,2979410

TABLEAU C.

Valeurs de

$$\left\{\begin{array}{lcl} \sin(A + 2D - 2T) & \multirow{2}{*}{et} & \sin(A - 2D - 2T) \\ \cos(A' + 2D' - 2T) & & \cos(A' - 2D' - 2T) \\ \sin(A + 2D - \alpha - 2T) & \multirow{2}{*}{et} & \sin(A - 2D - \alpha - 2T) \\ \cos(A' + 2D' - \alpha - 2T) & & \cos(A' - 2D' - \alpha - 2T) \end{array}\right.$$

Nº d'ordre.	DATES.		Temps sid. de Kiew.	Temps moyen de Greenwich.	LUNE		SOLEIL		
					Asc. dr. moy.	δ	Asc. dr. moy.	δ	α
1	1879. Mai	21.	18h23m53s,7	12h24m49s,2	4h26m56s	+25°28′12″	3h53m26s,68	+15° 9′24″,4	294°28′ 0″
2	Juin	6.	18 40 48,2	11 38 46,4	19 21 16	−23 23 19	4 58 26,64	22 42 8,9	294 52 45
3		14.	16 17 30,1	8 44 24,4	1 37 6	+15 41 11	5 31 3,62	23 17 23,8	295 2 15
4		15.	19 48 51,3	12 11 15,1	2 30 52	+20 6 44	5 35 48,77	23 20 26,2	295 3 30
5		17.	19 51 54,8	12 6 26,3	4 11 56	+25 9 8	5 44 6,93	23 24 23,4	295 5 30
6		18.	19 52 58,0	12 3 33,4	5 5 30	+26 1 55	5 48 16,00	23 25 46,5	295 6 15
7		20.	19 42 43,6	11 45 28,9	6 54 3	+24 0 57	5 56 32,18	23 27 16,2	295 7 15
8		21.	19 10 2,4	11 8 57,1	7 46 16	+21 13 45	6 0 35,47	23 27 16,8	295 7 30
9		22.	19 51 24,5	11 46 16,5	8 39 38	+17 11 25	6 4 51,63	23 27 7,6	295 7 45
10		24.	19 56 24,0	11 43 23,3	10 19 17	+ 6 53 27	6 13 10,22	23 25 20,1	295 8 45
11		25.	19 55 15,4	11 38 19,0	11 8 7	+ 1 1 14	6 17 18,62	23 25 49,5	295 9 15
12	Juillet	1.	20 31 22,1	11 50 44,2	16 48 25	−25 54 45	6 42 12,90	23 6 6,8	295 12 0
13		2.	16 56 58,3	7 53 3,0	17 42 32	−25 55 48	6 45 39,84	23 2 28,0	295 11 45
14		4.	19 56 15,2	11 3 55,5	19 53 48	−20 43 22	6 54 27,50	22 51 58,5	295 11 0
15		7.	19 54 35,9	10 50 28,7	22 27 38	− 5 53 0	7 6 45,09	22 34 11,3	295 10 15
16		11.	19 55 44,2	10 35 53,2	1 26 54	+14 44 30	7 23 4,00	22 5 1,6	295 10 30
17		12.	19 51 53,7	10 28 7,4	2 12 37	+18 48 25	7 27 6,97	21 56 48,3	295 10 15
18		13.	19 52 57,2	10 25 14,7	3 1 3	+22 8 40	7 31 10,35	21 48 11,0	293 10 0
19		15.	20 13 12,3	10 37 34,7	4 45 26	+25 53 8	7 39 18,77	21 20 42,1	295 9 15
20		18.	18 23 0,4	8 35 53,1	7 25 3	+22 30 16	7 51 4,23	21 0 14,3	295 6 30
21		19.	19 54 42,0	10 3 24,7	8 21 59	+18 40 14	7 55 19,82	20 48 46,6	295 5 15
22		20.	19 51 45,4	9 56 31,7	9 13 10	+14 3 44	7 59 18,94	20 37 39,3	295 4 30
23		21.	20 10 47,7	10 11 35,1	10 4 6	+ 8 36 59	8 3 21,27	20 26 0,9	295 3 15
24		25.	19 9 19,5	8 54 33,2	13 24 23	−14 33 38	8 19 1,76	19 37 13,9	295 0 30
25		26.	19 12 31,3	8 53 48,7	14 20 14	−19 23 23	8 22 58,43	19 24 3,8	294 59 45
26		27.	19 51 1,8	9 28 16,9	15 20 28	−23 11 53	8 27 0,34	19 10 14,9	294 58 45
27		30.	20 48 23,8	10 13 41,8	18 30 1	−24 54 45	8 38 52,61	18 27 25,1	294 54 0
28	Août	1.	21 29 15,7	10 46 35,2	20 27 43	−18 10 54	8 46 44,75	17 57 17,2	294 50 15
29		3.	19 27 23,6	8 37 11,3	22 5 16	− 8 28 38	8 54 8,29	17 27 43,4	294 47 30
30		4.	20 25 34,1	9 31 16,3	22 53 58	− 2 44 14	8 58 8,35	17 11 14,3	294 46 0
31		5.	19 7 33,2	8 9 32,2	23 36 46	+ 2 29 5	9 1 45,93	16 55 58,7	294 44 30
32		8.	17 40 31,6	6 30 57,2	1 49 19	+16 50 6	9 12 59,05	16 7 1,4	294 40 30
33		9.	18 50 0,1	7 36 18,4	2 39 4	+20 42 47	9 16 57,94	15 49 1,3	294 39 0
34		12.	19 28 7,6	8 2 31,8	5 15 9	+26 3 10	9 28 24,15	14 55 29,5	294 33 30
35		16.	19 50 14,6	8 8 51,6	8 51 52	+16 7 11	9 43 27,02	13 41 7,3	294 24 15
36		17.	20 2 43,2	8 17 22,4	9 43 54	+10 53 16	9 47 12,52	13 21 52,6	294 22 0
37		18.	20 16 40,4	8 27 21,3	10 35 10	+ 5 1 43	9 50 57,64	13 2 23,8	294 19 30
38		21.	20 6 10,0	8 5 4,9	13 9 49	−13 0 53	10 2 2,18	+12 3 27,1	294 13 30

TABLEAU C (*suite*).

Valeurs de
$\begin{cases} \sin (A + 2D - 2T) \\ \cos (A' + 2D' - 2T) \end{cases}$ et $\begin{matrix} \sin (A - 2D - 2T) \\ \cos (A' - 2D' - 2T) \end{matrix}$

$\begin{cases} \sin (A + 2D - \alpha - 2T) \\ \cos (A' + 2D' - \alpha - 2T) \end{cases}$ et $\begin{matrix} \sin (A - 2D - \alpha - 2T) \\ \cos (A' - 2D' - \alpha - 2T) \end{matrix}$

N° d'ordre.	A+2D-2T	A-2D-2T	A+2D-α-2T	A-2D-α-2T	A'+2D'-2T	A'-2D'-2T	A'+2D'-2T-α	A'-2D'-2T-α
1	-103°16'26"	-163°54' 4"	-397 44 26	458 22 4	- 74°16'21"	-176° 9' 9"	- 8°44'21"	-110°37' 9"
2	- 80 23 13	171 11 47	375 15 58	466 4 32	316 51 38	223 18 22	251 44 23	158 11 7
3	+ 0 35 33	92 34 3	294 26 42	387 36 18	73 6 8	135 50 52	8 8 23	70 53 7
4	-103 47 38	197 9 22	398 51 8	492 12 52	156 29 17	236 56 13	331 32 47	171 59 43
5	-103 6 59	196 44 31	398 12 29	491 50 1	122 37 44	223 14 16	57 43 14	158 19 46
6	-102 33 28	196 16 32	397 39 43	491 22 53	108 2 40	212 10 20	43 8 55	147 16 35
7	- 95 19 13	189 8 17	390 26 28	484 15 32	79 49 6	175 52 54	14 56 21	111 0 9
8	- 62 57 41	156 46 49	358 5 11	451 54 19	55 59 45	140 54 45	351 7 15	76 2 15
9	- 97 34 59	191 23 31	392 42 44	486 31 16	71 24 55	140 10 35	6 32 40	75 18 20
10	- 98 3 50	191 45 10	393 12 35	486 53 55	69 35 51	97 9 39	4 44 36	32 18 24
11	- 96 30 22	190 5 38	391 39 37	485 14 53	68 33 32	72 38 28	3 42 47	7 47 43
12	-108 55 31	201 19 59	404 7 31	496 31 59	55 24 15	311 45 15	350 36 15	246 57 15
13	- 87 58 4	180 7 56	383 9 49	475 19 41	284 42 51	180 59 39	219 54 36	116 11 24
14	- 88 46 49	180 14 41	383 57 49	475 25 41	341 7 14	258 13 46	276 18 14	193 24 46
15	- 85 28 23	173 45 7	380 38 38	470 55 22	272 9 30	248 37 30	207 19 45	183 47 45
16	- 82 55 58	171 16 2	378 6 28	466 26 32	186 39 30	245 37 30	121 50 0	180 48 0
17	- 80 16 24	168 3 36	375 26 39	463 13 51	165 11 40	240 24 20	100 20 55	175 34 35
18	- 80 4 39	167 17 21	375 14 39	462 27 21	146 55 25	235 30 5	82 5 25	170 40 5
19	- 88 47 6	174 45 54	383 56 21	469 55 9	123 28 59	227 1 31	58 38 14	162 10 46
20	- 31 43 47	115 44 43	326 50 17	410 51 13	35 13 58	125 15 2	330 20 28	60 21 32
21	- 76 53 56	160 9 4	371 59 11	455 14 19	74 36 17	149 17 13	9 41 32	84 22 28
22	- 74 47 42	157 18 18	369 52 12	452 22 48	69 27 47	125 42 43	4 32 17	60 47 13
23	- 83 41 28	165 25 32	378 44 43	460 28 47	77 8 17	111 36 13	12 11 32	46 39 28
24	- 50 39 47	129 8 43	345 40 17	424 9 13	42 41 16	344 26 44	337 41 46	279 27 14
25	- 51 42 52	129 19 8	346 42 37	424 18 53	39 59 1	322 25 29	334 58 46	257 25 14
26	- 70 25 15	147 6 15	365 24 0	442 5 0	51 47 6	319 0 54	346 45 51	253 59 39
27	- 97 53 55	171 23 35	392 27 55	466 17 35	36 31 15	296 52 15	331 25 15	231 46 15
28	-117 2 11	188 51 19	411 52 26	483 41 34	14 3 48	301 20 12	308 54 3	236 10 27
29	- 55 14 19	125 5 11	350 1 49	419 52 41	269 20 1	235 25 29	204 7 31	170 12 59
30	- 83 52 32	152 37 28	378 38 32	447 23 28	274 45 58	263 49 2	209 31 58	198 35 2
31	- 44 28 17	112 12 13	339 12 47	406 56 43	214 36 50	221 33 10	149 21 20	159 17 40
32	+ 0 13 2	64 15 2	294 27 28	358 55 32	109 15 48	176 36 12	43 56 18	111 16 42
33	- 34 7 28	97 23 32	328 46 28	392 2 32	123 50 26	206 37 34	58 29 26	141 16 34
34	- 52 6 45	111 48 45	346 40 15	406 22 15	93 10 10	197 22 50	27 43 40	131 56 20
35	- 64 23 16	119 7 44	358 47 31	413 31 59	69 54 53	134 25 37	4 19 8	68 47 52
36	- 67 49 44	121 17 16	362 11 44	415 39 16	73 36 28	117 9 32	7 58 28	51 31 41
37	- 74 30 57	126 40 33	368 50 27	421 0 3	79 29 19	99 36 11	13 48 49	33 55 41
38	- 68 27 36	-116 41 24	-362 41 6	410 54 54	- 71 39 31	- 19 35 59	- 5 53 1	-313 49 29

TABLEAU C (*suite*).

$(a) = \log \frac{1}{S} \sin(A + 2D - 2T)$ $(d) = \log \frac{1}{R} \cos(A - 2D - 2T)$

$(b) = \log \frac{1}{S} \cos(A + 2D - 2T)$ $(e) = \log \frac{1}{S} \sin(A + 2D - \alpha - 2T)$

$(c) = \log \frac{1}{R} \sin(A - 2D - 2T)$ $(f) = \log \frac{1}{S} \cos(A + 2D - \alpha - 2T)$

Nº d'ordre.	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
1	- 9,6883244	- 9,0611063	- 9,1415961	- 9,6812469	- 9,4869110	+ 9,5981419
2	- 9,6936749	+ 8,9225541	- 8,8838228	- 9,6938891	- 9,1402879	+ 9,6842140
3	+ 7,7135469	+ 9,6995771	- 9,6987952	- 8,3503327	+ 9,6588149	+ 9,3164020
4	- 9,6878464	- 9,0769340	+ 9,1690479	- 9,6795086	- 9,4970469	+ 9,5909607
5	- 9,6880538	- 9,0554357	+ 9,1587746	- 9,6804864	- 9,4908906	+ 9,5947288
6	- 9,6889749	- 9,0368180	+ 9,1468819	- 9,6815781	- 9,4855256	+ 9,5980185
7	- 9,6975521	- 8,6665461	+ 8,9002890	- 9,6938132	- 9,4041439	+ 9,6350070
8	- 9,6491571	+ 9,3570513	- 9,2952024	- 9,6627428	- 9,3722611	+ 9,6450037
9	- 9,6955896	- 8,8198735	+ 8,9950261	- 9,6907855	- 9,4321229	+ 9,6244103
10	- 9,6950457	- 8,8463585	+ 9,0084379	- 9,6902684	- 9,4379242	+ 9,6219093
11	- 9,6965341	- 8,7535678	+ 8,9432023	- 9,6927162	- 9,4194113	+ 9,6293547
12	- 9,6750313	- 9,2101533	+ 9,2604766	- 9,6687954	- 9,5419162	+ 9,5551830
13	- 9,6988924	+ 8,2491607	+ 7,0664811	- 9,6996642	- 9,2939589	+ 9,6626666
14	- 9,6990024	+ 8,0271073	+ 7,3307651	- 9,6997049	- 9,3077988	+ 9,6599527
15	- 9,6976564	+ 8,5963243	- 8,5693585	- 9,6985797	- 9,2462564	+ 9,6701906
16	- 9,6955939	+ 8,7889058	- 8,8812224	- 9,6947832	- 9,1914070	+ 9,6768442
17	- 9,6926157	+ 8,9267080	- 9,0155766	- 9,6903853	- 9,1242830	+ 9,6829326
18	- 9,6922953	+ 8,9351537	- 9,0423926	- 9,6891238	- 9,1186931	+ 9,6832834
19	- 9,6986777	+ 8,0247990	- 8,6602251	- 9,6981275	- 9,0805883	+ 9,6857945
20	- 9,6196341	+ 9,6284000	- 9,6546040	- 9,3378521	+ 9,4366935	+ 9,6215059
21	- 9,6872582	+ 9,0540682	- 9,2309282	- 9,6734111	- 9,0160933	+ 9,6891368
22	- 9,6832116	+ 9,1174580	- 9,2864027	- 9,6650237	- 8,9327085	+ 9,6922129
23	- 9,6960073	+ 8,7395592	- 9,1008311	- 9,6858334	- 9,2056201	+ 9,6749772
24	- 9,5869852	+ 9,5005572	- 9,5897138	- 9,5003205	+ 9,0920785	+ 9,6848352
25	- 9,5935438	+ 9,4906183	- 9,5886394	- 9,5019538	+ 9,0509801	+ 9,6867274
26	- 9,6726521	+ 9,2236713	- 9,4106838	- 9,6336763	- 8,6721428	+ 9,6965831
27	- 9,6946742	- 9,8178500	- 8,8751875	- 9,6951482	- 9,4282563	+ 9,6246731
28	- 9,6481260	- 9,3559682	+ 8,8875715	- 9,6950007	- 9,5941749	+ 9,4889367
29	- 9,6129898	+ 9,4543568	+ 9,6131330	- 9,4597482	+ 8,9367177	+ 9,6917552
30	- 9,6958333	+ 8,7264756	- 9,3628155	- 9,6486357	- 9,2029922	+ 9,6749156
31	- 9,5437670	+ 9,5517685	- 9,6667809	- 9,2775996	+ 9,2484015	+ 9,6690902
32	+ 7,2759229	+ 9,6982514	- 9,6548454	+ 9,3382012	+ 9,6574212	+ 9,3152878
33	- 9,4471959	+ 9,6161664	- 9,6966717	- 8,8097102	+ 9,4128979	+ 9,6302691
34	- 9,5953947	+ 9,4864243	- 9,6680808	- 9,2703540	+ 9,0609808	+ 9,6863274
35	- 9,6531781	+ 9,3338923	- 9,6416419	- 9,3876748	+ 8,0221346	+ 9,6980061
36	- 9,6646956	+ 9,2748003	- 9,6321381	- 9,4158588	- 8,2811552	+ 9,6977408
37	- 9,6820049	+ 9,1245024	- 9,6045941	- 9,4765746	- 8,8847459	+ 9,6928677
38	- 9,6665560	+ 9,2628173	- 9,6515088	- 0,3527107	- 8,3687965	+ 0,6975169

TABLEAU C (*suite*).

$(g) = \log \frac{1}{R} \sin (A - 2D - \alpha - 2T)$

$(h) = \log \frac{1}{R} \cos (A - 2D - \alpha - 2T)$

$(a') = \log \frac{f}{S'} \sin (A' + 2D' - 2T)$

$(b') = \log \frac{f}{S'} \cos (A' + 2D' - 2T)$

$(c') = \log \frac{f}{R'} \sin (A' - 2D' - 2T)$

$(d') = \log \frac{f}{R'} \cos (A' - 2D' - 2T)$

N° d'ordre.	(g)	(h)	(a')	(b')	(c')	(d')
1	- 9,6950237	- 8,8065745	- 9,7095929	+ 9,1592371	- 8,5442076	- 9,7164983
2	- 9,6817138	- 9,1413514	+ 9,5480034	+ 9,5762290	+ 9,5730820	- 9,5981763
3	- 9,3651702	+ 9,6467426	- 9,7151516	+ 9,1977228	- 9,5457939	- 9,5586477
4	- 9,5688827	- 9,5265792	- 9,5343457	- 9,6957963	+ 9,6236255	- 9,4371875
5	- 9,5715038	- 9,5233999	- 9,6526310	- 9,4589720	+ 9,5520044	- 9,5787363
6	- 9,5745951	- 9,5195787	- 9,7014877	- 9,2144088	+ 9,4476876	- 9,6489977
7	- 9,6066083	- 9,4498119	- 9,7070274	- 8,9613292	- 8,5870467	- 9,7296090
8	- 9,6991863	- 8,2212454	- 9,6277092	+ 9,4567648	- 9,5241741	- 9,6144492
9	- 9,6044805	- 9,4740416	- 9,6814808	+ 9,2081297	- 9,5439147	- 9,0228607
10	- 9,6024045	- 9,4778972	- 9,6709206	+ 9,2414009	- 9,7380122	- 8,6371227
11	- 9,6115380	- 9,4607469	- 9,6669011	+ 9,2609881	- 9,2183178	+ 9,7233384
12	- 9,5371678	- 9,5604238	- 9,6457683	+ 9,4844601	+ 9,5479172	+ 9,5972288
13	- 9,6557739	- 9,3309022	+ 9,7101601	+ 9,1294703	+ 9,9691105	- 9,7297385
14	- 9,6555478	- 9,3526337	+ 9,2212274	+ 9,7872320	+ 9,7286959	- 9,0475382
15	- 9,6701516	- 9,2525642	+ 9,6983151	+ 8,2745165	+ 9,7080505	- 9,3006650
16	- 9,6817157	- 9,1516943	+ 8,7881838	- 9,7320863	+ 9,6616258	- 9,3178142
17	- 9,6881995	- 9,0594717	- 9,1410674	- 9,7184343	+ 9,6447921	- 9,4091028
18	- 9,6895562	- 9,0337145	- 9,4680787	- 9,6542945	+ 9,6255795	- 9,4626915
19	- 9,6731512	- 9,2525140	- 9,6460757	- 9,4665795	+ 9,5858542	- 9,5531258
20	- 9,5896010	+ 9,5012506	- 9,4722914	+ 9,6233146	- 9,6455824	- 9,4948447
21	- 9,6981951	- 8.6605243	- 1,6903536	+ 9,1302499	- 9,4454330	- 9,6715999
22	- 9,6996468	- 8,3184525	- 9,6738121	+ 9,2474028	- 9,6493684	- 9,5060499
23	- 9,6927326	- 8,9598763	- 9,6885210	+ 9,0470870	- 9,7100253	- 9,3077195
24	- 9,6543232	+ 9,3395597	- 9,5733514	+ 9,6084403	+ 9,1313529	+ 9,6868139
25	- 9,6549214	+ 9,3370384	- 9,5490259	+ 9,6244656	+ 9,4929757	+ 9,6968142
26	- 9,6959847	+ 8,8391806	- 9,6316516	+ 9,5278298	+ 9,5308967	+ 9,5919636
27	- 9,6823669	- 9,1481401	- 9,5076600	+ 9,6381209	+ 9,6688886	+ 9,3736301
28	- 9,6205503	- 9,4442853	- 9,0915877	+ 9,6927757	+ 9,6707191	+ 9,4552553
29	- 9,6372206	+ 9,4007969	+ 9,6994622	- 7,7650866	+ 9,6565170	- 9,4921664
30	- 9,6997847	+ 8,3583255	+ 9,7006025	+ 8,6216475	+ 9,7374867	- 8,7722382
31	- 9,5639736	+ 9,5344737	+ 9,4928884	- 9,6539061	+ 9,5441929	- 9,5509730
32	+ 7,9735265	+ 9,7001897	- 9,7091141	- 9,2526000	+ 8,4764715	- 9,7030319
33	- 9,4250105	+ 9,6285188	- 9,6514399	- 9,4778176	+ 9,3590534	- 9,5589273
34	- 9,5599802	+ 9,5391698	- 9,7238306	- 8,4651344	+ 9,1977933	- 9,7022374
35	- 9,6057265	+ 9,4744068	- 9,6767519	+ 9,2398643	- 9,5953627	- 9,5841693
36	- 9,6171975	+ 9,4518032	- 9,6827524	+ 9,1513199	- 9,6910676	- 9,4012049
37	- 9,6422194	+ 9,3859713	- 9,6912951	+ 8,9597435	- 9,7373268	- 8,9657071
38	- 9,5904035	+ 9,5000639	- 9,7205414	+ 9,2410511	- 9,2276947	+ 9,6761371

TABLEAU C (*suite*).

$$(e') = \log \frac{f}{S'} \sin (A' + 2D' - \alpha - 2T) \qquad (g') = \log \frac{f}{R'} \sin (A' - 2D' - \alpha - 2T)$$

$$(f') = \log \frac{f}{S} \cos (A' + 2D' - \alpha - 2T) \qquad (h') = \log \frac{f}{R'} \cos (A' - 2D' - \alpha - 2T)$$

N° d'ordre.	(e')	(f')	(g')	(h')	tg. δ	log tg. δ
1	- 8,9078264	+ 9,7210928	- 9,6887269	- 9,2642117	6′ 10″,51	2,7462229
2	+ 9,6906578	- 9,2090973	- 9,5069069	- 9,7045544	6 6,48	2,7497586
3	- 8,8853549	+ 9,7299329	- 9,6782006	+ 9,2179901	4 42,76	2,8626384
4	+ 8,9007805	- 9,7286956	- 8.8441537	- 9,6960913	6 17,64	2,7369329
5	- 9,6543154	+ 9,4548069	- 9,2835397	- 9,6844632	6 20,92	2,7334997
6	- 9,5583791	+ 9,5873853	- 9,4542613	- 9,6463405	6 20,43	2,7346410
7	- 9,1251928	+ 9,6989881	- 9,7009664	- 9,2852004	6 20,55	2,7334997
8	+ 8,8876665	+ 9,7039204	- 9,7114595	+ 9,1070182	6 17,42	2,7380833
9	- 8,8616451	+ 9,7019005	- 9,7230286	+ 9,1417299	6 15,38	2,7403934
10	- 8,6165223	+ 9,6975674	- 9,4693205	+ 9,6683722	6 18,36	2,7369328
11	- 8,5093520	+ 9,6971351	- 8,8759514	+ 9,7595510	6 18,15	2,7369328
12	+ 8,9531392	+ 9,7244089	+ 9,6883633	- 9,3171804	6 16,84	2,7380833
13	+ 9,5318948	- 9,6094671	- 9,6827507	- 9,3745783	4 24,86	2,8911790
14	+ 9,7086143	+ 9,7518575	+ 9,1033449	- 9,7259126	6 14,85	2,7403934
15	+ 0,3605324	- 9,6472238	+ 9,5598673	- 9,7380468	6 14,12	2,7415531
16	- 9,6640871	- 9,4570612	+ 7,8471255	- 9,7021500	6 12,66	2,7427158
17	- 9,7260088	- 8,9875274	- 8,5927238	- 9,7042054	6 12,76	2,7427158
18	- 9,7269280	+ 8,8697381	- 8,9195062	- 9,7037926	6 12,21	2,7438817
19	- 9,6562856	+ 9,4412673	- 9,2053219	- 9,6981940	6 7,67	2,7485769
20	+ 9,4056517	+ 9,6502042	- 9,6726457	+ 9,4277777	5 51,63	2,7678820
21	- 8,9524511	+ 9,6999800	- 9,7351372	+ 9,7285786	6 9,96	2,7462229
22	- 8,6006221	+ 9,7009654	- 9,6807529	+ 9,4283047	6 9.92	2,7462229
23	- 9,0242344	+ 9,6896489	- 9,6033496	+ 9,5782041	6 6,34	2,7509436
24	+ 9,3213436	+ 9,7083383	+ 9,6970754	+ 8,9185298	6 6,18	2,7509436
25	+ 9,3663537	+ 9,6973105	+ 9,6972336	- 9,0458303	6 6,50	2,7497586
26	+ 9,0961267	+ 9,7246886	+ 9,6969137	- 9,1545771	6 7,63	2,7485769
27	+ 9,4128254	+ 9,6766315	+ 9,6136797	- 9,5100664	5 49,25	2,7715993
28	+ 9,5971018	+ 9,5039335	+ 9,6586588	- 9,4847950	5 23,27	2,8052223
29	+ 9,3109315	- 9,6597978	- 8,9703120	- 9,7336854	6 5,60	2,7509436
30	+ 9,3948846	- 9,6416630	+ 9,2433925	- 9,7167636	5 57,51	2,7605417
31	- 9,4458293	- 9,6731806	- 9,2465943	- 9,6691263	6 2,47	2,7557161
32	- 9,5754305	+ 9 5915288	- 9,6731316	- 9,2635813	5 19,48	2,8106341
33	- 9,6627749	+ 9,4502549	- 9,5038885	- 9,5997041	5 56,87	2,7617565
34	- 9,3902016	+ 9,6695212	- 9,5940256	- 9,5475294	6 2,85	2,7545181
35	- 9,5808391	+ 9,7027656	- 9,7088898	+ 9,2976310	6 1,16	2,7569175
36	- 9,8429487	+ 9,6965542	- 9,6355008	+ 9,5557084	5 59,03	2,7593301
37	- 9,0766997	+ 9,6858939	- 9,4902076	+ 9,6623972	5 55,16	2,7611964
38	- 8,7539422	+ 9,7408906	+ 9,5602721	+ 9,5424505	5 56,83	2,7617565

TABLEAU D. — Coefficient de x.

Nº d'ordre.	DATES.			$\frac{1}{S}\cos(A+2D-2T)$	$\frac{1}{R}\cos(A-2D-2T)$	$\frac{\operatorname{tg}\delta}{S}\sin(A+2D-\alpha-2T)$	$\frac{\operatorname{tg}\delta}{R}\sin(A-2D-\alpha-2T)$
1	1879.	Mai	21	− 0,115	− 0,480	− 171,055	− 276,215
2		Juin	6	+ 0,084	− 0,494	− 74,139	− 270,077
3			14	+ 0,500	− 0,022	+ 332,242	− 168,970
4			15	− 0,119	− 0,478	− 171,387	− 202,216
5			17	− 0,114	− 0,479	− 167,655	− 201,841
6			18	− 0,109	− 0,480	− 166,020	− 203,815
7			20	− 0,046	− 0,494	− 137,292	− 218,830
8			21	+ 0,228	− 0,460	+ 128,926	− 273,697
9			22	− 0,066	− 0,491	− 148,773	− 221,245
10			24	− 0,070	− 0,490	− 149,574	− 218,443
11			25	− 0,057	− 0,493	− 143,332	− 223,095
12		Juillet	1	− 0,162	− 0,466	− 190,546	− 188,474
13			2	+ 0,018	− 0,501	− 153,157	− 352,333
14			4	+ 0,011	− 0,501	− 111,736	− 248,852
15			7	+ 0,039	− 0,500	− 97,232	− 258,050
16			11	+ 0,061	− 0,495	− 85,926	− 265,724
17			12	+ 0,084	− 0,490	− 92,682	− 269,710
18			13	+ 0,086	− 0,489	− 72,875	− 271,293
19			15	+ 0,011	− 0,499	− 67,478	− 264,076
20			18	+ 0,425	− 0,218	+ 160,168	− 227,763
21			19	+ 0,113	− 0,471	− 57,852	− 278,239
22			20	+ 0,131	− 0,462	− 47,745	− 279,171
23			21	+ 0,055	− 0,485	− 90,482	− 277,762
24			25	+ 0,317	− 0,316	+ 69,066	− 254,253
25			26	+ 0,309	− 0,317	+ 64,526	− 253,910
26			27	+ 0,167	− 0,430	− 26,346	− 278,331
27			30	− 0,657	− 0,496	− 158,437	− 284,424
28		Août	1	− 0,227	− 0,495	− 250,840	− 266,424
29			3	+ 0,285	− 0,288	+ 48,715	− 244,436
30			4	+ 0,053	− 0,445	− 91,946	− 288,620
31			5	+ 0,356	− 0,189	+ 100,952	− 208,781
32			8	+ 0,499	+ 0,218	+ 293,803	+ 6,084
33			9	+ 0,413	− 0,064	+ 149,504	− 153,733
34			12	+ 0,306	− 0,186	+ 65,389	− 206,299
35			16	+ 0,216	− 0,244	+ 6,013	− 230,486
36			17	+ 0,188	− 0,260	− 10,977	− 237,973
37			18	+ 0,133	− 0,300	− 44,560	− 254,927
38			21	+ 0,183	− 0,225	− 13,507	− 224,988

TABLEAU D (*suite*). — Coefficient de x.

Nº d'ordre.	DATES.	$\frac{f}{S}\cos(A'+2D'-2T)$	$\frac{f}{R}\cos(A'-2D'-2T)$	$\frac{f \operatorname{tg}\delta}{S}\sin(A'+2D'-\alpha-2T)$	$\frac{f \operatorname{tg}\delta}{R}\sin(A'-2D'-\alpha-2T)$
1	1879. Mai 21	+ 0,31455	− 1,1349	− 98,312	− 593,48
2	Juin 6	+ 0,8216	− 0,8642	+ 615,000	− 248,584
3	14	+ 0,3437	− 0,7890	− 122,02	− 757,34
4	15	− 1,0821	− 0,5965	+ 946,60	− 83,09
5	17	− 0,6272	− 0,8264	− 532,44	− 226,723
6	18	− 0,3572	− 0,9715	− 428,03	− 336,79
7	20	− 0,1994	− 1,1700	− 157,45	− 592,83
8	21	+ 0,6241	− 0,8972	+ 920,89	− 613,76
9	22	+ 0,3520	− 0,9148	− 871,96	− 633,69
10	24	+ 0,3801	− 0,0376	− 49,194	− 522,05
11	25	+ 0,3976	+ 1,1529	− 38,437	− 894,02
12	Juillet 1	+ 0,6652	+ 0,8623	+ 107,07	+ 581,97
13	2	+ 0,2037	− 1,1700	+ 577,47	− 817,31
14	4	+ 1,0610	− 0,2432	+ 613,01	+ 152,12
15	7	+ 0,0410	− 0,4356	+ 275,77	+ 435,39
16	11	− 1,1764	− 0,4531	− 556,24	+ 8,478
17	12	− 1,1400	− 0,5592	− 641,48	− 47,195
18	13	− 0,9834	− 0,6326	− 644,26	− 100,43
19	15	− 0,6368	− 0,7791	− 553,75	− 196,04
20	18	+ 0,9157	− 0,6813	+ 325,08	− 601,15
21	19	+ 0,2942	− 1,0234	− 104,02	− 660,41
22	20	+ 0,3854	− 0,6990	− 48,451	− 582,697
23	21	+ 0,2430	− 0,4428	− 129,91	− 492,890
24	25	+ 0,8849	+ 1,0600	+ 257,48	+ 611,611
25	26	+ 0,9182	+ 0,8816	+ 284,82	+ 610,167
26	27	+ 0,7350	+ 0,8519	+ 152,46	+ 607,921
27	30	+ 0,9475	+ 0,5153	+ 333,34	+ 529,341
28	Août 1	+ 1,0746	+ 0,6218	+ 550,33	+ 634,363
29	3	− 0,0127	− 0,6771	+ 251,38	− 114,739
30	4	+ 0,0912	− 0,1293	+ 311,80	+ 219,984
31	5	− 0,9826	− 0,7752	− 346,74	− 219,163
32	8	− 0,3900	− 1,1002	− 530,30	− 664,083
33	9	− 0,6550	− 0,9940	− 579,40	− 401,885
34	12	− 0,6362	− 1,0982	− 304,21	− 486,406
35	16	+ 0,3787	− 0,8368	− 474,48	− 802,175
36	17	+ 0,3089	− 0,5491	− 872,44	− 541,112
37	18	+ 0,1987	− 0,2014	− 151,13	− 391,617
38	21	+ 0,37976	+ 1,0340	− 71,475	+ 363,48

TABLEAU D. — Coefficient de *y*.

N° d'ordre.	DATES.			$\frac{1}{S}\sin(A+2D-2T)$	$\frac{1}{R}\sin(A-2D-2T)$	$\frac{\operatorname{tg}\delta}{S}\cos(A+2D-\alpha-2T)$	$\frac{\operatorname{tg}\delta}{R}\cos(A-2D-\alpha-2T)$
1	1879.	Mai	21	- 0,488	- 0,138	+ 220,986	- 35,711
2		Juin	6	- 0,494	- 0,076	271,637	- 77,824
3			14	+ 0,005	- 0,500	151,022	+ 323,133
4			15	- 0,487	+ 0,148	212,762	- 183,448
5			17	- 0,488	+ 0,144	212,926	- 180,675
6			18	- 0,489	+ 0,140	215,109	- 179,564
7			20	- 0,498	+ 0,079	233,616	- 152,514
8			21	- 0,446	- 0,197	241,594	- 9,106
9			22	- 0,496	+ 0,099	231,645	- 163,856
10			24	- 0,496	+ 0,102	228,480	- 163,991
11			25	- 0,497	+ 0,088	232,427	- 157,645
12		Juillet	1	- 0,473	+ 0,182	196,456	- 198,841
13			2	- 0,500	+ 0,001	357,976	- 166,756
14			4	- 0,500	+ 0,002	251,399	- 118,311
15			7	- 0,498	- 0,037	258,074	- 98,655
16			11	- 0,496	- 0,076	262,760	- 78,417
17			12	- 0,493	- 0,104	266,470	- 63,414
18			13	- 0,492	- 0,110	267,314	- 59,923
19			15	- 0,500	- 0,046	271,886	- 95,696
20			18	- 0,416	- 0,455	245,125	+ 185,843
21			19	- 0,487	- 0,170	272,496	- 25,512
22			20	- 0,482	- 0,193	274,433	- 11,605
23			21	- 0,497	- 0,126	266,637	- 51,383
24			25	- 0,386	- 0,389	272,769	+ 123,168
25			26	- 0,392	- 0,388	273,204	+ 122,123
26			27	- 0,471	- 0,257	278,715	+ 38,704
27			30	- 0,495	- 0,075	249,042	- 83,126
28		Août	1	- 0,444	+ 0,077	196,861	- 177,627
29			3	- 0,410	- 0,411	277,140	+ 141,821
30			4	- 0,496	- 0,231	272,557	+ 13,148
31			5	- 0,350	- 0,464	265,954	+ 195,070
32			8	+ 0,002	- 0,451	133,635	+ 324,208
33			9	- 0,280	- 0,497	246,619	+ 245,627
34			12	- 0,394	- 0,466	275,960	+ 196,647
35			16	- 0,450	- 0,438	285,052	+ 170,343
36			17	- 0,462	- 0,429	286,464	+ 162,605
37			18	- 0,481	- 0,402	216,460	+ 141,308
38			21	- 0,464	- 0,448	287,921	+ 182,735

TABLEAU D (*suite*). — Coefficient de y.

N° d'ordre.	DATES.			$\frac{f}{S}\sin(A'+2D'-2T)$	$\frac{f}{R}\sin(A'-2D'-2T)$	$\frac{f\,tg\,\delta}{S}\cos(A'+2D'-\alpha-2T)$	$\frac{f\,tg\,\delta}{R}\cos(A'-2D'-\alpha-2T)$
1	1879.	Mai	21	- 1,1170	- 0,07633	+ 639,400	- 223,30
2		Juin	6	+ 0,7699	+ 0,8157	- 198,30	- 620,54
3			14	- 1,1314	- 0,7642	+ 833,73	+ 262,47
4			15	- 0,4708	+ 0,9164	- 636,92	- 590,86
5			17	- 0,9797	+ 0,7770	+ 336,33	- 570,72
6			18	- 1,0964	+ 0,6111	+ 457,60	- 524,13
7			20	- 1,1104	- 0,0842	+ 590,13	- 227,59
8			21	- 0,9250	- 0,7288	+ 603,20	+ 152,60
9			22	- 1,0470	- 0,7627	+ 603,61	+ 166,14
10			24	- 1,0218	- 1,1925	+ 592,87	+ 554,32
11			25	- 1,0124	- 0,3604	+ 592,27	+ 653,04
12		Juillet	1	- 0,9643	+ 0,7698	+ 632,33	- 247,58
13			2	+ 1,1184	+ 2,0303	- 690,40	- 401,99
14			4	+ 0,3628	+ 1,1672	+ 677,18	- 637,91
15			7	+ 1,0883	+ 1,1130	- 533,62	- 657,74
16			11	+ 0,1338	+ 1,0002	- 345,33	- 607,16
17			12	- 0,3017	+ 0,9621	- 117,14	- 610,07
18			13	- 0,6405	+ 0,9205	+ 89,55	- 611,13
19			15	- 0,9650	+ 0,8362	+ 337,52	- 609,86
20			18	- 0,3242	- 0,9639	+ 570,88	+ 342,07
21			19	- 1,0686	- 0,6080	+ 609,06	+ 650,516
22			20	- 1,0286	- 0,9723	+ 610,44	+ 325,025
23			21	- 1,0641	- 1,1181	+ 601,24	+ 465,162
24			25	- 0,8181	+ 0,2950	+ 627,68	+ 101,843
25			26	- 0,7718	+ 0,6785	+ 610,27	- 136,159
26			27	- 0,9334	+ 0,7402	+ 648,22	- 174,426
27			30	- 0,7000	+ 1,0170	+ 611,91	- 416,987
28		Août	1	- 0,2692	+ 1,0213	+ 444,24	- 425,083
29			3	+ 1,0912	+ 0,9885	- 561,30	- 665,405
30			4	+ 1,0941	+ 0,1191	- 550,38	- 654,277
31			5	+ 0,6781	+ 0,7632	- 585,27	- 579,827
32			8	- 1,1158	- 0,0653	+ 550,32	- 258,625
33			9	- 0,9770	+ 0,4983	+ 355,20	- 501,196
34			12	- 1,1542	+ 0,3437	+ 578,75	- 437,023
35			16	- 1,0356	- 0,8547	+ 628,26	+ 247,176
36			17	- 1,0500	- 1,0703	+ 622,79	+ 430,027
37			18	- 1,0709	- 1,1909	+ 614,53	+ 582,170
38			21	- 1,1455	- 0,36826	+ 693,59	+ 439,201

α URSAE MINORIS (Pulkowa).

K = —0ˢ,181 L = 6° W. de Greenwich.

Nº d'ordre.	DATES DES OBSERVATIONS.			Temps moyen de Greenwich.	SOLEIL Asc. dr. moy.	SOLEIL Décl.	LUNE Asc. dr. moy.	LUNE Décl.	Asc. droite observée.
1	1861.	Avril	4.	22ʰ 18ᵐ	0ʰ 54ᵐ	+ 5° 48′	20ʰ 47ᵐ	- 16° 3′	1ʰ 9ᵐ 38ˢ,54
2			5.	22 14	0 58	+ 6 11	21 34	- 11 32	38,54
3			6.	22 10	1 2	+ 6 33	22 19	- 6 37	38,42
4			22.	21 3	2 1	+ 12 17	11 37	- 2 37	38,67
5		Mai	1.	20 28	2 35	+ 15 9	20 29	- 17 20	40,13
6			3	20 20	2 42	+ 15 45	22 4	- 8 6	39,03
7			8.	20 0	3 2	+ 17 9	1 44	+ 15 59	38,81
8		Oct.	6.	10 7	12 50	- 5 24	15 9	- 21 32	38,21
9			17.	9 23	13 31	- 9 31	15 28	- 22 24	38,87
10	1862.	Avril	4.	22 19	0 53	+ 5 42	4 35	+ 23 33	38,34
11			14.	21 35	1 30	+ 9 25	13 12	- 12 36	38,69
12			15.	21 31	1 34	+ 9 47	14 11	- 17 20	40,78
13			23.	21 0	2 3	+ 12 32	21 58	- 7 36	37,48
14			30.	20 33	2 30	+ 14 46	3 28	+ 21 36	38,24
15		Mai	1.	20 28	2 34	+ 15 5	4 16	+ 23 5	38,16
16			14.	19 37	3 24	+ 18 38	15 43	- 22 9	39,20
17			15.	19 33	3 28	+ 18 52	16 49	- 23 31	38,89
18			16.	19 29	3 32	+ 19 6	17 52	- 23 22	39,43
19			17	19 25	3 36	+ 19 20	18 55	- 21 16	38,72
20			19.	19 17	3 44	+ 19 46	19 55	- 18 2	38,77
21			29.	18 39	4 24	+ 21 38	4 51	+ 23 31	38,28
22			30.	18 35	4 28	+ 21 47	5 43	+ 23 18	38,94
23			31.	18 31	4 32	+ 21 55	6 35	+ 22 1	40,07
24	1868.	Avril	8.	22 0	1 13	+ 7 47	15 2	- 12 6	37,74
25			13.	21 37	1 28	+ 9 15	18 29	- 18 58	38,32
26			14.	21 23	1 32	+ 9 37	19 20	- 18 31	37,19
27			15.	21 29	1 36	+ 9 58	20 8	- 17 19	37,96
28		Mai	11.	19 48	3 14	+ 18 1	18 59	- 19 2	37,35
29			23	19 1	4 2	+ 20 41	5 1	+ 17 55	38,69
30			29.	18 37	4 26	+ 21 42	10 54	+ 8 7	38,66
31		Sept.	23.	10 57	12 0	- 0 11	17 28	- 18 35	39,05
32		Déc.	8.	5 58	17 2	- 22 48	12 47	- 0 39	39,45
33			14.	5 34	17 29	- 23 16	18 5	- 19 43	39,39

N° d'ordre.	DATES DES OBSERVATIONS.			Temps moyen de Greenwich.	SOLEIL. Asc. dr. moy.	SOLEIL. Décl.	LUNE. Asc. dr. moy.	LUNE. Décl.	Asc. droite observée.
34	1869.	Avril	2.	22h 26m	0h 47m	+ 5° 3′	17h 43m	− 19° 31′	1h 9m 37s,46
35			3.	22 22	0 51	+ 5 26	18 37	− 20 8	38,03
36			5.	22 14	0 58	+ 6 12	20 20	− 18 23	39,34
37			26.	20 47	2 16	+ 13 37	14 25	− 9 9	37,76
38		Mai	4.	20 15	2 46	+ 16 3	21 40	− 14 57	38,61
39			10.	19 52	3 9	+ 17 42	2 14	+ 8 13	38,12
40			12.	19 44	3 17	+ 18 13	3 53	+ 15 23	39,08
41			18.	19 40	3 41	+ 19 37	9 31	+ 15 36	38,20
42		Juillet	1.	16 28	6 42	+ 23 6	0 6	− 3 51	37,39
43			19.	16 17	7 55	+ 20 40	16 10	− 16 12	38,74
44			21.	15 9	8 3	+ 20 26	17 58	− 20 11	38,29
45			23.	15 1	8 17	+ 20 2	19 47	− 20 0	38,92
46		Oct.	3.	10 18	12 40	− 4 16	11 16	+ 8 18	38,22
47		Déc.	12.	5 43	17 21	− 23 9	0 45	− 0 28	39,29
48			28.	4 41	18 32	− 23 15	14 42	− 10 24	38,08
49	1870.	Mars	23.	23 6	0 9	+ 1 3	17 22	− 20 34	38,10
50			24.	23 2	0 13	+ 1 27	18 30	− 21 37	37,79
51			28.	22 46	0 28	+ 3 31	22 3	− 14 49	37,56
52		Avril	2.	22 47	0 46	+ 4 57	1 47	+ 5 45	38,06
53		Mai	9.	19 57	3 5	+ 17 23	10 1	+ 15 18	37,57
54		Juin	1.	18 27	4 36	+ 22 4	6 5	+ 21 49	39,98
55			5.	18 21	4 52	+ 22 34	9 44	+ 16 40	39,18
56		Juillet	6.	16 9	6 59	+ 22 43	12 58	− 0 30	38,55
57			11.	15 49	7 18	+ 22 18	17 39	− 21 14	38,15
58			25.	14 54	8 16	+ 19 40	5 26	+ 20 49	38,95
59		Sept.	8.	11 57	11 4	+ 5 50	21 44	− 16 45	38,52
60			21.	11 6	11 51	+ 0 52	8 15	+ 21 9	39,02
61		Nov.	15.	7 30	15 22	− 18 31	9 20	+ 18 44	39,02
62		Déc.	1.	6 27	16 30	− 21 50	0 8	− 4 4	38,57
63			2.	6 22	16 34	− 21 59	0 53	− 0 3	38,77

N° d'ordre.	A+2D-2T	A-2D-2T	A+2D-α-2T	A-2D-α-2T	A'+2D'-2T	A'-2D'-2T	A'+2D'-α-2T	A'-2D'-α-2T
1	350° 6'	326°54'	332°36'	309°24'	244°39'	308°51'	227° 9	291°21'
2	351 52	327 8	334 22	309 34	265 26	311 34	247 56	294 4
3	353 36	327 24	336 6	309 54	316 46	343 14	286 16	312 44
4	19 49	330 41	2 19	313 11	134 1	144 29	116 31	126 59
5	34 3	333 27	16 35	329 42	237 35	306 55	220 5	289 25
6	37 0	334 0	19 20	316 30	279 48	312 12	262 18	294 42
7	45 48	345 12	28 10	317 42	23 0	319 0	5 30	301 30
8	146 42	168 18	129 12	150 48	149 1	235 19	131 41	217 49
9	148 43	186 47	131 13	169 17	137 16	226 44	119 46	209 14
10	349 39	326 51	332 5	309 21	-13 21	80 51	63 21	-10 49
11	6 20	328 40	348 50	311 10	188 12	137 48	120 18	170 42
12	8 4	328 56	350 34	311 26	212 25	143 5	125 35	194 55
13	20 49	330 41	3 19	313 11	309 32	279 18	261 48	292 12
14	32 2	-27 2	14 32	315 28	-26 12	60 12	42 42	316 18
15	33 40	-26 40	16 10	315 50	-17 10	75 10	57 40	-34 40
16	53 16	-21 16	35 46	321 14	245 3	156 27	138 57	227 33
17	54 44	-20 44	37 14	321 46	264 17	170 13	152 43	246 47
18	56 12	-20 12	38 42	-37 42	279 44	186 12	168 46	252 14
19	57 40	-19 40	40 10	-37 10	291 17	206 13	188 43	273 47
20	60 32	-18 32	43 2	-37 2	299 49	227 41	210 11	282 19
21	74 16	-12 16	56 46	-29 46	-9 17	84 47	67 17	-26 47
22	75 34	-11 34	58 4	-29 4	4 9	97 21	79 51	-13 21
23	76 50	-10 50	59 20	-28 20	19 43	107 47	90 17	+ 2 13
24	358 49	327 41	341 19	310 11	214 42	166 18	148 48	197 12
25	5 30	328 30	348 0	311 0	280 11	204 19	186 49	262 41
26	7 14	328 46	349 44	311 16	292 2	217 58	200 28	274 32
27	8 56	329 4	351 26	311 34	301 38	232 22	214 52	284 8
28	49 32	337 28	32 2	319 58	287 49	211 41	194 11	270 19
29	66 52	344 8	49 22	326 38	4 25	76 5	58 35	346 55
30	74 54	348 6	57 24	330 36	112 16	144 44	127 14	94 46
31	144 38	145 22	127 8	127 52	264 10	189 50	172 20	246 40
32	174 34	266 6	157 24	248 36	158 3	155 27	137 57	140 33
33	180 43	273 47	163 28	256 32	275 41	196 49	179 19	258 11
34	346 51	326 39	329 21	309 9	269 47	191 43	174 13	252 17
35	348 37	326 53	331 7	309 23	284 31	203 59	186 29	267 1
36	351 39	326 51	334 9	309 21	306 56	233 4	215 34	289 26
37	26 14	331 46	8 44	314 16	199 33	162 57	145 27	182 3
38	38 36	334 24	21 6	316 54	319 54	260 6	242 36	302 14
39	47 39	336 51	30 9	319 21	342 4	14 56	357 26	324 34
40	50 41	337 49	33 11	320 19	352 29	54 1	36 31	334 59
41	59 29	341 1	41 59	323 31	76 33	138 57	121 27	59 3
42	111 42	19 18	94 12	1 48	334 12	318 48	301 18	316 42
43	125 23	42 7	107 53	24 37	229 54	175 6	157 36	222 24
44	126 37	44 53	109 7	27 23	274 52	194 8	176 38	257 22

N° d'ordre.	A+2D-2T	A-2D-2T	A+2D-α-2T	A-2D-α-2T	A'+2D'-2T	A'-2D'-2T	A'+2D'-α-2T	A'-2D'-α-2T
45	129° 19'	49° 11'	111° 49'	51° 41'	301° 45'	221° 45'	204° 15'	284° 15'
46	146 28	163 32	128 58	146 2	150 6	150 6	132 36	99 24
47	178 57	271 33	161 27	254 3	337 11	335 29	317 49	319 41
48	196 30	289 30	179 0	272 0	206 18	164 42	147 12	188 48
49	329 21	325 9	302 51	307 39	266 38	184 22	116 52	249 8
50	331 9	325 21	213 39	307 51	285 44	199 16	181 46	268 14
51	339 2	324 58	321 32	307 28	324 23	267 7	249 37	306 53
52	346 24	326 36	328 54	309 6	21 14	322 16	304 46	3 44
53	46 1	336 29	28 31	318 59	126 45	126 45	109 15	109 15
54	78 8	349 52	60 38	332 22	25 39	86 51	69 21	8 29
55	83 8	352 52	65 38	335 22	67 22	154 38	137 8	49 52
56	115 1	24 19	97 31	6 49	160 30	158 30	141 0	143 0
57	118 54	30 6	101 24	12 36	272 13	187 17	169 47	254 43
58	128 20	49 40	110 50	32 10	4 52	88 8	70 38	347 22
59	141 40	119 20	124 10	101 50	324 30	257 30	240 0	307 0
60	144 29	141 1	126 59	123 31	46 27	131 3	113 33	28 57
61	158 28	232 32	140 58	215 2	67 32	142 28	124 58	50 2
62	168 50	256 10	151 20	238 40	336 22	317 34	300 4	318 52
63	169 32	257 28	152 2	239 58	338 9	338 21	310 51	320 39

N° d'ordre.	I	II	III	IV	I'	II'	III'	IV'
1	+ 0,42	+ 5,20	- 0,32	+ 45,34	+ 0,16	- 6,60	- 2,64	- 8,72
2	+ 0,46	+ 5,20	- 0,65	- 34,01	+ 0,17	- 6,60	- 1,91	+ 0,87
3	+ 0,51	+ 5,00	- 0,98	- 17,44	+ 0,17	- 7,20	- 0,58	+ 10,03
4	+ 0,93	+ 6,40	+ 0,32	+ 6,54	+ 0,07	- 15,20	+ 0,30	- 3,92
5	+ 1,16	+ 1,80	- 0,12	- 48,40	- 0,07	- 15,80	- 2,84	- 13,52
6	+ 1,20	+ 5,20	- 0,60	- 24,45	- 0,11	- 20,40	- 1,26	+ 3,49
7	+ 1,13	+ 2,80	+ 1,20	+ 20,06	+ 0,32	- 22,80	+ 0,43	- 41,42
8	+ 0,38	+ 4,80	+ 3,36	+ 5,23	+ 0,16	- 6,00	- 0,73	- 59,30
9	+ 0,74	+ 6,40	+ 3,54	+ 16,13	+ 0,17	- 11,20	- 0,13	- 58,86
10	+ 0,44	+ 5,00	+ 3,06	- 23,11	+ 0,16	- 6,20	- 2,03	- 47,09
11	+ 0,72	+ 6,40	+ 2,03	+ 20,93	+ 0,15	- 11,20	+ 0,63	- 30,52
12	+ 0,64	+ 6,40	+ 2,84	+ 16,57	+ 0,15	- 11,60	+ 0,13	- 46,65
13	+ 0,97	+ 6.80	- 0,53	- 23,54	+ 0,07	- 15,80	- 1,98	+ 30,52
14	+ 1,14	+ 5,20	+ 3,29	+ 0,44	- 0,06	- 19,20	- 1,00	- 59,73
15	+ 1,16	+ 4,80	+ 3,19	- 12,64	- 0,07	- 19,40	- 1,76	- 61,91
16	+ 1,33	+ 1,60	+ 3,31	- 2,62	- 0,38	- 24,40	- 1,23	- 61,04
17	+ 1,36	+ 0,20	+ 2,91	- 21,36	- 0,41	- 24,40	- 2,21	- 59,73
18	+ 1,35	- 0,20	+ 2,21	- 36,62	- 0,44	- 25,00	- 2,89	- 51,88
19	+ 1,37	- 0,60	+ 1,23	- 62,78	- 0,47	- 24,80	- 3,16	- 36,62
20	+ 1,37	- 1,40	+ 0,33	- 47,09	- 0,53	- 25,60	- 2,94	- 20,93
21	+ 1,35	- 6,60	+ 2,91	- 21,80	- 0,81	- 26,80	- 2,26	- 59,73
22	+ 1,35	- 6,80	+ 2,31	- 34,41	- 0,84	- 26,60	- 2,81	- 52,76
23	+ 1,35	- 7,40	+ 1,53	- 43,60	- 0,87	- 26,80	- 3,14	- 42,29

Nº d'ordre.	I	II	III	IV	I'	II'	III'	IV'
24	+ 0,59	+ 6,20	+ 1,96	+ 4,36	+ 0,17	− 8,80	− 0,40	− 35,31
25	+ 0,71	+ 6,40	+ 1,43	− 37,93	+ 0,15	− 10,80	− 2,71	− 37,93
26	+ 0,74	+ 6,40	+ 0,78	− 44,91	+ 0,15	− 11,60	− 2,91	− 28,78
27	+ 0,78	+ 6,40	− 0,15	− 46,25	+ 0,15	− 11,60	− 2,89	− 17,44
28	+ 1,33	+ 1,60	+ 1,05	− 42,29	− 0,32	− 23,40	− 2,91	− 33,14
29	+ 1,38	− 3,60	+ 2,26	− 19,62	− 0,66	− 25,80	− 1,91	− 47,09
30	+ 1,36	− 3,80	− 0,43	− 30,08	− 0,23	− 24,20	− 0,38	+ 8,72
31	− 0,02	+ 0,40	+ 2,06	− 26,16	—	− 0,20	− 2,21	− 46,22
32	+ 1,25	− 11,40	+ 0,12	+ 17,44	− 1,07	− 26,40	+ 0,05	− 1,74
33	+ 1,12	− 15,20	+ 1,76	− 34,44	− 1,23	− 25,20	− 2,66	− 43,60
34	+ 0,39	+ 4,60	+ 1,98	− 29,65	+ 0,16	− 5,20	− 2,46	− 45,78
35	+ 0,39	+ 4,80	+ 1,41	− 40,98	+ 0,16	− 6,00	− 2,94	− 39,24
36	+ 0,45	+ 5,40	—	− 49,70	+ 0,17	− 6,80	− 2,81	− 15,70
37	+ 1,05	+ 6,20	+ 1,58	+ 7,85	+ 0,02	− 17,60	− 0,05	− 26,16
38	+ 1,22	+ 4,00	− 0,85	− 42,73	− 0,13	− 20,80	− 2,36	− 1,74
39	+ 1,30	+ 2,40	+ 1,43	+ 7,85	− 0,29	− 23,20	+ 0,05	− 21,36
40	+ 1,38	+ 0,14	+ 2,38	− 4,80	− 0,34	− 23,60	− 1,00	− 44,47
41	+ 1,37	− 0,12	− 0,78	− 45,34	− 0,49	− 25,40	− 2,43	—
42	+ 0,69	− 21,40	− 0,55	− 54,50	− 1,51	− 19,60	− 0,38	+ 7,25
43	+ 0,17	− 24,40	+ 2,41	− 8,28	− 1,51	− 10,60	− 1,25	− 45,34
44	+ 0,23	− 24,40	− 0,38	− 34,00	− 1,50	− 10,00	− 2,66	− 44,47
45	+ 0,03	− 24,40	+ 0,45	− 50,14	− 1,48	− 8,00	− 3,19	− 20,06
46	+ 0,31	+ 4,20	—	− 36,66	+ 0,15	− 4,60	—	+ 11,34
47	+ 1,17	− 13,40	− 0,08	− 1,31	− 1,18	− 25,80	− 0,03	+ 1,31
48	+ 0,76	− 20,60	+ 1,75	+ 6,54	− 1,50	− 20,40	− 0,18	− 30,16
49	+ 0,06	− 1,60	+ 2,33	− 26,60	+ 0,05	+ 1,00	− 2,38	− 50,14
50	+ 0,10	− 29,00	+ 1,58	− 42,29	+ 0,06	− 4,60	− 3,09	− 42,29
51	+ 0,24	+ 3,80	− 1,02	− 40,98	+ 0,13	− 3,60	− 2,16	+ 6,10
52	+ 0,34	+ 4,60	− 2,46	− 18,75	+ 0,15	− 5,20	− 0,35	+ 38,80
53	+ 1,30	+ 2,40	—	—	− 0,25	− 22,80	—	—
54	+ 1,32	− 8,00	+ 1,41	− 27,47	− 0,89	− 26,80	− 2,13	− 34,44
55	+ 1,28	− 10,00	− 1,26	− 59,73	− 1,00	− 26,60	− 3,26	+ 3,92
56	+ 0,57	− 22,20	+ 0,08	− 0,87	− 1,53	− 17,40	+ 0,13	− 1,31
57	+ 0,43	− 23,20	+ 2,21	− 31,39	− 1,55	− 13,20	− 2,56	− 49,70
58	+ 0,02	− 24,20	+ 2,28	− 27,90	− 1,45	− 8,00	+ 2,43	− 51,01
59	− 0,29	− 7,00	− 1,03	− 47,96	− 1,51	+ 3,00	− 2,59	+ 3,05
60	− 0,05	− 0,80	+ 0,08	− 55,81	− 0,04	+ 0,60	− 3,39	− 18,75
61	+ 1,35	− 0,80	− 0,78	− 52,76	− 0,38	+ 3,20	− 2,91	− 2,18
62	+ 1,33	− 7,00	− 0,66	− 10,94	− 0,85	− 26,80	− 0,43	+ 9,16
63	+ 1,31	− 7,60	—	− 5,23	− 0,87	− 26,80	—	+ 5,23

$$\mathrm{I} = \cot\omega\left[\frac{\sin(A+2D-2T)}{S} - \frac{\sin(A-2D-2T)}{R}\right]$$

$$\mathrm{II} = \operatorname{tg}\delta\left[\frac{\cos(A+2D-2T-\alpha)}{S} - \frac{\cos(A-2D-2T-\alpha)}{R}\right]$$

$$\mathrm{III} = f\cot\omega\left[\frac{\sin(A'+2D'-2T)}{S} - \frac{\sin(A'-2D'-2T)}{R}\right]$$

$$\mathrm{IV} = f\operatorname{tg}\delta\left[\frac{\cos(A'+2D'-2T-\alpha)}{S} - \frac{\cos(A'-2D'-2T-\alpha)}{R}\right]$$

$$\mathrm{I}' = \cot\omega\left[\frac{\cos(A+2D-2T)}{S} - \frac{\cos(A-2D-2T)}{R}\right]$$

$$\mathrm{II}' = \operatorname{tg}\delta\left[\frac{\sin(A+2D-2T-\alpha)}{S} - \frac{\sin(A-2D-2T-\alpha)}{R}\right]$$

$$\mathrm{III}' = f\cot\omega\left[\frac{\cos(A'+2D'-2T)}{S} - \frac{\cos(A'-2D'-2T)}{R}\right]$$

$$\mathrm{IV}' = f\operatorname{tg}\delta\left[\frac{\sin(A'+2D'-2T-\alpha)}{S} - \frac{\sin(A'-2D'-2T-\alpha)}{R}\right]$$

Équations de condition.

1. .	A +50,64 *y*	—17,80 *x*	—23,10=0.
2. .	—29,00	— 7,47	21,30
3. .	—12,91	+ 2,42	24,30
4. .	+14,19	—18,75	25,05
5. .	—45,56	—33,23	46,95
6. .	—18,65	—18,28	30,45
7. .	+25,19	—64,11	27,15
8. .	+13,77	—63,87	18,15
9. .	+16,81	—70,02	28,05
10. .	—14,61	—55,16	20,10
11. .	+30,08	—40,96	25,35
12. .	+26,45	—57,97	56,70
13. .	—16,30	—14,66	5,04
14. .	+10,07	—79,99	13,02
15. .	— 3,49	—83,14	12,18
16. .	+ 3,62	—87,05	33,00
17. .	—16,89	—86,75	28,35
18. .	—33,26	—80,25	36,45
19. .	—60,78	—65,05	25,80
20. .	—46,79	—50,00	26,55
21. .	—24,14	—89,60	19,20
22. .	—37,58	—83,01	29,10
23. .	—48,14	—73,10	31,05
24. .	+13,11	—44,34	11,10
25. .	—28,39	—51,29	19,80
26. .	—37,00	—43,14	2,85
27. .	—39,22	—31,78	14,40
28. .	—38,31	—59.77	5,25
29. .	—19,58	—75,46	25,35
30. .	—32,95	—16,69	24,90
31. .	—23,72	—48,63	30,75
32. .	+ 7,41	—29,16	36,75
33. .	A —47,36 *y*	—72,89 *x*	—35,85=0.

34. .	A —22,68 *y*	—53,28 *x*	— 6,90=0.
35. .	—34,38	—48,02	15,45
36. .	—43,85	—25,14	35,10
37. .	+16,68	—43,79	11,40
38. .	—38,36	—21,55	24,15
39. .	+12,98	—44,80	16,88
40. .	— 1,00	—69,41	31,20
41. .	—44,87	—28,32	19,35
42. .	—75,76	—13,64	5,85
43. .	—30,10	—58,78	26,10
44. .	—58,55	—58,63	19,35
45. .	—74,06	—32,73	28,80
46. .	—32,15	+ 6,89	18,30
47. .	—13,62	—25,70	34,35
48. .	—11,55	—52,24	16,20
49. .	—25,81	—51,57	16,56
50. .	—69,61	—49,83	11,85
51. .	—47,96	+ 0,47	8,40
52. .	—16,27	+33,40	15,96
53. .	+ 3,70	—23,05	8,55
54. .	—32,74	—64,26	44,70
55. .	—69,71	—26,94	32,70
56. .	—20,68	—20,11	23,25
57. .	—51,95	—67,01	17,25
58. .	—49,80	—62,89	29,25
59. .	—56,28	— 1,05	22,80
60. .	—56,58	—25,54	30,30
61. .	—53,00	— 8,67	30,30
62. .	—17,27	—18,92	23,55
63. .	A —11,52 *y*	—22,44 *x*	—26,55=0.

Avec ces 63 équations de condition on peut former les équations normales suivantes :

$$63\,A - 1446{,}50\,y - 2662{,}95\,x - 1509{,}54 = 0,$$
$$-31 \quad +2067{,}98 \quad +1174{,}42 \quad +\ 795{,}55 = 0,$$
$$-53 \quad +1487{,}31 \quad +2774{,}93 \quad +1371{,}66 = 0,$$

qui donneront pour les inconnues les valeurs suivantes :

$$A = +\,17'',45 \qquad x = -\,0'',172 \qquad y = -\,0'',058$$

d'où l'on déduit

$$K = -\,0'',181 \quad \text{et} \quad L = 36^{\circ}\text{W. de Pulkowa},$$
$$L = 6^{\circ}\text{W. de Greenwich.}$$

Si l'on remplace les inconnues par leurs valeurs dans les équations de condition correspondant aux observations qui présentent le plus grand écart, on a :

Nº d'ordre.	Dates des observations.			Observ. de Pulkowa.	Observ. corrigées.
5	1861.	Mai	1. . .	$1^h9^m40^s,13$	$38^s,72$
8		Octobre	6. . .	$38^s,21$	$38^s,86$
12	1862.	Avril	15. . .	$40^s,78$	$38^s,73$
13		Avril	23. . .	$37^s,48$	$38^s,39$
26	1868.	Avril	14. . .	$37^s,19$	$38^s,80$
32		Décembre	8. . .	$39^s,45$	$38^s,47$
36	1869.	Avril	5. . .	$39^s,04$	$38^s,62$
42		Juillet	1. . .	$37^s,39$	$38^s,61$
51	1870.	Mars	28. . .	$37^s,56$	$38^s,30$
54		Juin	1. . .	$39^s,98$	$39^s,02$

α URSAE MINORIS (Greenwich, 1869).

$K = -0^s.124$ $L = 28°$ W. de Greenwich.

N° d'ordre.	DATES DES OBSERVATIONS.			Temps moyen de Greenwich.	SOLEIL. Asc. dr. moy.	SOLEIL. Décl.	LUNE. Asc. dr. moy.	LUNE. Décl.	Asc. droite observée.
1	1869.	Janv.	1.	$6^h 25^m$ *p. s.*	$18^h 49^m$	−22°59′	$9^h 50^m$	+13°55′	$1^h 10^m 53^s + 3^s,30$
2			2.	6 21	18 53	−22 54	10 38	+10 37	5,52
3			4.	6 14	19 2	−22 42	12 35	+ 0 36	4,87
4			5.	6 10	19 6	−22 35	13 27	− 4 6	4,40
5			8.	5 58	19 19	−22 11	16 3	−15 36	5,47
6		Avril	11.	23 51	1 20	+ 8 26	0 18	− 2 12	3,10
7			13.	23 43	1 27	+ 9 10	3 24	+13 31	1,74
8			26.	22 52	2 16	+13 37	15 29	−13 51	1,59
9			27.	22 48	2 20	+13 56	16 26	−17 5	4,34
10			28.	22 44	2 23	+14 15	17 23	−19 15	6,28
11			29.	22 40	2 27	+14 34	18 19	−20 17	4,39
12		Mai	12.	21 49	3 17	+18 23	4 50	+18 14	6,27
13			19.	21 21	3 45	−19 6	11 24	+ 7 17	3,60
14		Juin	6.	20 10	4 58	+22 42	2 46	+10 44	0,84
15			8.	20 2	5 6	+22 53	4 29	+17 18	3,87
16		Sept.	15.	13 32	11 53	+ 2 55	20 13	−19 24	1,85
17			20.	13 12	11 51	+ 0 59	0 7	− 3 45	5,11
18			21.	13 8	11 55	+ 0 36	0 51	+ 0 26	3,24
19			25.	12 53	12 9	− 0 58	3 55	+15 36	2,86
20			28.	12 41	12 20	− 2 8	6 34	+20 50	1,84
21		Oct.	1.	12 29	12 31	− 3 18	9 25	+16 22	4,99
22			5.	12 13	12 45	− 4 51	13 16	− 2 48	4,58
23			6.	12 10	12 49	− 5 14	14 13	− 8 2	4,21
24			8.	12 1	12 56	− 6 0	16 8	−16 27	4,41
25			9.	11 57	13 0	− 6 23	17 6	−19 8	5,83
26			11.	11 50	13 7	− 7 9	18 59	−20 57	4,47
27			19.	11 18	13 37	−10 6	1 20	+ 3 15	5,49
28		Nov.	4.	10 15	14 39	−15 29	15 37	−14 41	3,58
29			6.	10 7	14 47	−16 6	17 35	−20 16	6,08
30			10.	9 51	15 3	−17 15	21 17	−17 11	4,96
31			11.	9 47	15 7	+17 32	22 6	−14 11	5,40
32			15.	9 32	15 23	−18 35	1 5	− 1 40	5,75
33			16.	9 28	15 27	−18 50	1 49	+ 5 52	5,09
34			19.	9 16	15 40	−19 35	4 12	+16 52	4,51
35			20.	9 12	15 44	−19 47	5 4	+19 19	2,39
36		Déc.	14.	7 37	17 28	−23 15	2 17	+ 8 16	4,39
37			20.	7 14	17 54	−23 27	7 30	+21 8	3,90
38			29.	6 38	18 34	−23 13	15 41	−14 52	+3,57

Nº d'ordre.	DATES DES OBSERVATIONS.			Temps moyen de Greenwich.	SOLEIL. Asc. dr. moy.	SOLEIL. Décl.	LUNE. Asc. dr. moy.	LUNE. Décl.	Asc. droite observée.
39	1869.	Janv.	1.	18h 25m *p. i.*	18h 49m	−22° 59′	10h 18m	+10° 59′	1h 10m 53s + 4s,26
40			3.	18 17	18 57	−22 48	12 9	+ 2 59	4,66
41			5.	18 14	19 6	−22 35	13 53	− 6 20	4,74
42			7.	18 2	19 15	−22 20	15 37	−14 5	5,71
43		Avril	12.	11 47	1 24	+ 8 48	2 12	+ 8 2	3,09
44			13.	11 43	1 27	+ 9 10	3 0	+11 48	1,71
45			27.	10 48	2 20	+13 56	15 57	−15 35	2,93
46			28.	10 44	2 23	+14 15	16 54	−18 18	5,39
47			29.	10 40	2 27	+14 34	17 51	−19 55	7,00
48			30.	10 36	2 31	+14 52	18 45	−20 23	4,54
49		Mai	13.	9 45	3 21	+18 28	5 18	+19 22	6,23
50			20.	9 17	3 49	+20 3	11 51	+ 4 53	3,62
51		Juin	7.	8 6	5 2	+22 47	2 22	+ 8 47	0,78
52			8.	8 2	5 6	+22 53	4 2	+15 54	3,98
53			9.	7 58	5 11	+22 58	4 56	+18 29	4,09
54		Sept.	15.	1 32	11 33	+ 2 55	19 44	−20 8	1,47
55			16.	1 18	11 37	+ 2 32	20 34	−18 40	2,00
56			21.	1 8	11 55	+ 0 36	0 29	− 1 40	4,10
57			25.	0 53	12 9	− 0 58	3 30	+14 3	2,86
58			29.	0 37	12 23	− 2 32	7 0	+20 50	2,04
59		Oct.	1.	0 29	12 31	− 3 18	8 56	+17 53	4,85
60			6.	0 10	12 49	− 5 14	13 44	− 5 28	4,61
61			7.	0 6	12 52	− 5 37	15 39	−14 41	3,50
62			9.	23 57	13 0	− 6 23	17 34	−20 2	5,02
63			11.	23 50	13 7	− 7 9	19 26	−20 41	4,40
64			12.	23 46	13 11	− 7 31	20 19	−19 25	4,38
65			19.	23 18	13 37	−10 6	1 43	+ 5 21	5,27
66		Nov.	4.	22 15	14 39	−15 29	16 7	−16 32	3,42
67			5.	22 11	14 43	−15 47	17 6	−19 20	6,08
68			10.	21 51	15 3	−17 15	21 41	−15 46	5,07
69			15.	21 32	15 23	−18 50	1 28	+ 3 55	5,43
70			19.	21 16	15 40	−19 33	4 38	+18 11	4,58
71		Déc.	13.	19 31	17 23	−23 11	1 54	+ 6 18	4,50
72			19.	19 18	17 50	−23 26	7 1	+21 24	4,81
73			29.	18 38	18 34	−23 13	16 10	−16 40	+ 3,58

Nº d'ordre.	A+2D−2T	A−2D−2T	A+2D−α−2T	A−2D−α−2T	A′+2D′−2T	A′−2D′−2T	A′+2D′−α−2T	A′−2D′−α−2T
1	201° 17′	293° 13′	183° 47′	275° 43′	140° 20′	84° 40′	122° 50′	67° 10′
2	202 17	294 3	184 47	276 33	145 54	103 16	128 14	85 46
3	205 6	295 54	187 36	278 24	154 47	152 33	137 17	135 3
4	206 20	296 40	188 50	279 10	158 33	174 57	141 3	157 27
5	210 23	299 7	192 53	281 37	174 43	236 57	157 13	219 27
6	1 52	328 8	344 22	310 38	325 6	333 54	307 36	316 24
7	5 5	328 25	347 35	300 55	33 2	348 58	15 32	331 28
8	26 14	331 46	8 44	314 16	169 33	224 57	152 3	207 27
9	27 52	332 8	10 22	314 38	177 20	245 40	159 50	228 10
10	29 15	332 15	11 45	314 45	187 15	264 15	169 45	246 43
11	30 53	332 37	13 23	315 7	199 11	280 19	181 41	262 49
12	51 1	337 29	33 31	319 59	73 58	1 2	56 28	343 32
13	60 55	341 35	43 25	324 5	150 34	121 26	133 4	103 56
14	85 14	354 6	67 44	336 36	27 58	345 2	10 28	327 32
15	87 16	355 44	69 46	338 14	66 51	357 39	49 21	340 9
16	144 5	132 15	126 35	114 45	229 27	307 3	211 57	289 33
17	144 43	140 47	127 13	123 17	319 15	334 15	301 45	316 45
18	144 57	142 33	127 27	125 3	338 37	336 53	321 7	319 23
19	145 59	148 11	128 29	130 41	54 57	352 33	37 27	335 3
20	145 44	154 16	128 14	136 46	105 10	21 50	87 40	4 20
21	146 9	159 21	128 39	141 51	158 59	73 31	121 29	56 1
22	146 33	165 57	129 3	148 27	158 24	169 36	140 54	152 6
23	146 47	167 43	129 17	150 13	162 9	194 19	144 39	176 49
24	147 0	171 0	129 30	153 30	174 6	239 54	156 36	222 24
25	147 14	172 46	129 54	155 16	183 14	259 46	165 44	242 16
26	147 27	176 3	129 57	158 33	207 51	291 39	190 21	274 9
27	149 3	189 27	131 33	171 57	351 30	338 30	334 0	321 0
28	153 47	215 43	136 17	198 13	169 53	228 37	152 23	211 7
29	153 33	219 57	136 3	202 27	188 13	269 17	170 43	251 47
30	156 15	225 15	138 45	207 45	249 53	318 37	232 23	301 7
31	156 41	226 49	139 11	209 19	268 8	324 52	250 38	307 22
32	158 35	232 55	141 5	215 25	337 55	344 35	320 25	327 5
33	158 55	234 35	141 25	217 5	5 59	340 31	346 29	323 1
34	160 54	239 6	143 24	221 36	61 44	354 16	44 14	336 46
35	163 56	243 4	146 26	225 34	79 38	3 22	62 8	345 52
36	180 30	273 30	163 0	256 0	15 47	342 43	358 17	325 13
37	186 36	280 24	169 6	262 54	119 46	35 14	102 16	17 44
38	197 4	289 56	179 34	272 26	170 31	229 59	153 1	212 29
39	201° 13′	293° 15′	183° 45′	275° 45′	133° 28′	93° 32′	115° 58′	78° 2′
40	203 39	294 51	186 9	277 21	153 13	141 17	135 43	123 47
41	206 20	296 40	188 50	279 10	160 35	185 55	143 5	168 25
42	209 5	298 25	191 35	280 55	171 5	227 25	153 35	209 55
43	3 36	328 24	346 6	300 54	14 4	341 56	356 34	324 26
44	5 5	328 25	348 35	310 55	33 36	346 24	16 6	328 54
45	27 52	332 8	10 22	314 38	173 5	235 25	155 35	217 55
46	29 15	332 15	11 45	314 45	181 54	255 6	164 24	237 36
47	30 53	332 37	13 23	315 7	1[illegible]2 55	272 35	175 25	255 5
48	32 29	333 1	14 59	315 31	205 35	287 1	188 5	269 31
49	52 11	338 29	34 41	320 59	82 54	6 6	65 24	349 36

N° d'ordre.	A+2D-2T	A-2D-2T	A+2D-α 2T	A-2D-α-2T	A'+2D'-2T	A'-2D'-2T	A'+2D'-α-2T	A'-2D'-α-2T
50	62°21′	341° 9′	44°51′	323°39′	151°31′	132°59′	134° 1′	115°29′
51	66 4	14 56	48 34	357 26	18 4	342 56	0 34	325 26
52	67 16	15 44	49 46	358 14	60 28	357 32	42 58	340 2
53	68 41	16 49	51 11	359 19	75 58	2 12	58 28	344 42
54	144 5	132 25	126 35	114 55	220 14	300 46	202 44	283 16
55	144 19	134 11	126 49	116 41	236 10	310 50	218 40	293 20
56	144 57	142 33	127 27	125 3	228 55	235 35	211 25	218 5
57	145 19	148 11	127 59	120 41	45 36	349 24	28 6	321 54
58	145 49	155 49	128 11	138 19	111 40	28 20	94 10	10 50
59	146 9	159 21	128 39	141 51	134 46	63 14	117 16	45 44
60	146 47	167 43	129 17	150 13	160 4	181 56	142 34	164 26
61	146 48	169 14	129 18	151 44	170 23	229 7	152 53	211 37
62	147 24	172 46	129 54	155 16	188 26	268 34	170 56	251 4
63	147 27	176 3	129 57	158 33	215 8	297 52	197 38	280 22
64	147 43	177 47	130 13	160 17	230 55	308 35	213 25	291 5
65	149 3	189 27	131 33	171 57	346 27	325 3	328 57	307 33
66	153 47	215 43	136 17	198 13	173 41	239 49	156 11	222 19
67	154 11	217 19	136 41	199 49	182 50	260 10	165 20	242 40
68	156 15	225 15	139 45	207 45	158 43	321 47	141 13	304 17
69	158 5	233 25	140 35	215 55	354 50	339 10	337 20	311 40
70	160 54	239 6	143 24	221 36	70 52	358 8	53 22	330 38
71	179 23	271 7	161 53	253 37	05 54	341 6	348 24	323 36
72	185 38	278 22	168 8	260 52	113 3	27 27	95 33	9 57
73	197 4	289 56	179 34	272 26	174 10	240 50	156 40	223 20

N° d'ordre.	I	II	III	IV	I′	II′	III′	IV′
1	+ 64	- 152	- 18,40	- 22,00	- 90	- 216	+ 3,49	- 40,55
2	+ 63	- 154	- 18,00	- 22,40	- 87	- 143	+ 9,16	- 30,08
3	+ 55	- 155	- 17,00	- 22,60	- 8	- 5	+ 1,31	- 0,87
4	+ 51	- 155	- 16,60	- 23,00	+ 68	+ 17	- 10,46	+ 6,10
5	+ 42	- 155	- 15,20	- 23,60	+ 233	- 115	- 44,47	- 6,10
6	+ 64	+ 17	- 9,40	+ 6,00	- 32	- 20	+ 4,36	- 4,36
7	+ 71	+ 17	- 13,00	+ 9,20	+ 183	- 35	- 33,14	+ 3,92
8	+ 103	+ 2	- 17,60	+ 6,00	+ 226	- 68	- 40,11	+ 0,43
9	+ 108	—	- 17,60	+ 4,20	+ 241	- 148	- 47,09	- 11,77
10	+ 109	- 1	- 18,40	+ 4,20	+ 218	- 223	- 47,52	- 25,72
11	+ 111	- 3	- 18,60	+ 4,00	+ 163	- 281	- 41,86	- 38,37
12	+ 135	- 33	- 24,00	+ 1,20	+ 236	- 181	- 48,40	- 17,44
13	+ 136	- 54	- 25,40	- 1,60	- 95	- 88	+ 10,46	- 19,18
14	+ 127	- 103	- 26,40	- 11,00	+ 183	- 23	- 30,52	+ 5,67
15	+ 123	- 109	- 26,20	- 11,80	+ 238	- 153	- 47,52	- 12,21
16	- 17	- 16	+ 2,20	- 3,60	+ 13	- 316	- 17,88	- 51,88
17	- 6	- 4	+ 0,80	- 1,20	- 55	- 414	+ 7,41	- 8,72
18	- 3	- 2	+ 0,40	- 0,60	+ 8	- 464	- 1,31	+ 1,31
19	+ 3	+ 2	- 0,80	+ 0,80	+ 236	- 105	- 44,47	- 4,80
20	+ 14	+ 8	- 2,20	+ 2,20	+ 155	- 168	- 40,55	- 42,29
21	+ 23	+ 11	- 3,60	+ 3,20	- 75	- 259	- 1,31	- 47,09
22	+ 34	+ 15	- 5,00	+ 4,40	+ 50	- 12	- 6,98	+ 4,36
23	+ 38	+ 16	- 5,60	+ 4,80	+ 138	- 5	- 22,67	+ 7,85

N° d'ordre.	I	II	III	IV	I'	II'	III'	IV'
24	+ 43	+ 17	- 6,40	+ 5,00	+ 243	- 123	- 46,22	- 7,85
25	+ 48	+ 17	- 7,00	+ 5,40	+ 233	- 208	- 48,83	- 21,80
26	+ 54	+ 18	- 8,20	+ 5,80	+ 115	- 314	- 36,19	- 45,78
27	+ 78	+ 15	- 12,00	+ 6,40	+ 85	+ 30	- 8,28	+ 5,23
28	+ 118	- 10	- 20,00	+ 4,60	+ 231	- 80	- 43,16	- 0,87
29	+ 124	- 15	- 21,20	+ 4,20	+ 216	- 243	- 48,40	- 29 65
30	+ 129	- 23	- 22,60	+ 2,60	- 70	- 274	- 3,05	- 49,70
31	+ 129	- 28	- 22,80	+ 2,40	- 108	- 213	+ 6,54	- 40,55
32	+ 133	- 38	- 24,00	+ 0,80	- 28	- 10	+ 4,36	- 3,05
33	+ 135	- 41	- 24,60	+ 0,40	+ 100	+ 12	- 15,70	+ 7,41
34	+ 137	- 49	- 25,40	- 1,20	+ 246	- 131	- 47,09	- 8,72
35	+ 134	- 59	- 25,60	- 2,80	+ 233	- 208	- 48,83	- 21,80
36	+ 113	- 123	- 25,20	- 14,40	+ 143	—	- 23,54	+ 7,83
37	+ 99	- 133	- 23,60	- 17,20	+ 75	- 80	- 29,21	- 50,58
38	+ 75	- 152	- 20,00	- 20,60	+ 208	+ 409	- 42,73	- 1,74
39	+ 64	- 152	- 18,40	- 22,00	- 65	- 196	+ 3,48	- 28,31
40	+ 57	- 153	- 17,80	- 22,20	- 45	- 28	+ 6,09	- 6,47
41	+ 51	- 155	- 16,60	- 23,00	+ 107	+ 10	- 16,96	+ 7,28
42	+ 44	- 154	- 14,80	- 26,20	+ 143	- 78	- 40,89	- 1,32
43	+ 69	+ 17	- 12,40	+ 9,00	+ 18	+ 5	- 23,49	+ 8,25
44	+ 71	+ 17	- 11,20	+ 6,40	+ 201	- 33	- 34,80	+ 4,33
45	+ 108	—	- 17,60	+ 4,20	+ 171	- 103	- 44,80	- 5,24
46	+ 109	- 1	- 18,40	+ 4,20	+ 236	- 186	- 49,15	- 18,75
47	+ 112	- 3	- 18,60	+ 5,20	+ 196	- 256	- 46,11	- 32,20
48	+ 113	- 4	- 19,00	+ 5,00	+ 131	- 299	- 37,41	- 43,19
49	+ 133	- 36	- 24,00	+ 0,80	+ 223	- 218	- 46,98	- 24,42
50	+ 139	- 55	- 26,00	- 2,00	- 65	- 50	+ 8,26	- 11,77
51	+ 75	- 64	- 16,00	- 6,80	+ 150	- 2	- 25,66	+ 7,85
52	+ 74	- 66	- 16,00	- 7,20	+ 226	- 125	- 44,37	- 9,16
53	+ 74	- 69	- 16,00	- 7,40	+ 235	- 191	- 48,28	- 19,18
54	- 17	- 16	+ 2,20	- 3,60	+ 55	- 324	- 25,23	- 49,70
55	- 15	- 14	+ 2,20	- 3,60	- 20	- 306	- 12,61	- 51,01
56	- 3	+ 2	+ 1,60	- 2,60	+ 20	- 25	- 4,35	- 3,05
57	+ 4	+ 3	+ 0,60	- 1,00	+ 228	- 75	- 47,41	+ 3,92
58	+ 17	+ 9	+ 1,40	- 2,00	+ 115	- 314	- 35,23	- 45,78
59	+ 23	+ 11	- 2,20	+ 2,20	- 20	- 291	- 7,36	- 49,70
60	+ 38	+ 16	- 5,60	+ 4,80	+ 5	+ 15	- 13,92	+ 6,98
61	+ 43	+ 17	- 6,20	+ 5,00	+ 146	- 331	- 42,63	- 1,74
62	+ 54	+ 17	- 7,00	+ 5,40	+ 216	- 243	- 48,28	- 28,78
63	+ 58	+ 18	- 8,20	+ 5,80	+ 78	- 326	- 29,14	- 48,83
64	+ 78	+ 17	- 8,60	+ 6,00	—	- 319	- 16,96	- 52,37
65	+ 118	+ 15	- 12,00	+ 6,40	+ 82	+ 280	- 11,74	+ 10,42
66	+ 120	- 10	- 20,00	+ 4,60	+ 193	- 123	- 46,98	- 7,49
67	+ 129	- 11	- 20,40	+ 4,20	+ 233	- 208	- 50,02	- 22,67
68	+ 135	- 23	- 22,20	+ 2,20	+ 65	- 432	- 63,51	- 58,42
69	+ 137	- 38	- 24,40	+ 0,60	+ 68	+ 18	- 15,22	+ 10,90
70	+ 117	- 49	- 25,40	- 1,20	+ 246	- 168	- 55,68	- 11,77
71	+ 117	- 117	- 25,40	- 13,40	+ 68	+ 10	- 16,53	+ 7,41
72	+ 102	- 130	- 24,00	- 16,40	+ 118	- 321	- 35,67	- 47,09
73	+ 74	- 152	- 20,00	- 20,60	+ 193	- 123	- 46,54	- 8,28

Équations de condition.

1 . .	A - 62,81 y	—18,58 x	- 3,30 = 0.
2 . .	—52,73	—11,81	5,52
3 . .	- 23,00	- 17,29	4,87
4 . .	—15,71	- 28,44	4,40
5 . .	- 26,95	- 62,37	5,47
6 . .	+ 2,26	— 5,07	3,10
7 . .	+ 15,56	—46,32	1,74
8 . .	+ 9,74	—58,37	1,59
9 . .	— 4,08	—66,17	4,34
10 . .	—18,25	- 68,16	6,28
11 . .	- 31,63	- 63,30	4,39
12 . .	—12,53	—74,54	6,27
13 . .	—20,37	—16,36	3,60
14 . .	— 2,23	—58,18	0,84
15 . .	—20,40	—76,34	3,87
16 . .	—55,52	—19,00	1,85
17 . .	—10,53	+ 4,03	5,11
18 . .	+ 0,76	— 4,57	3,24
19 . .	— 1,61	- 46,30	2,86
20 . .	—38,40	—44,35	1,84
21 . .	—44,41	— 7,39	4,99
22 . .	+ 9,60	—11,71	4,58
23 . .	+14,41	—28,06	4,21
24 . .	+ 0,01	—53,68	4,41
25 . .	—13,59	—57,74	5,83
26 . .	—38,29	—47,35	4,47
27 . .	+13,26	- 19,83	5,49
28 . .	+ 7,22	—64,06	3,58
29 . .	—22,05	—72,18	6,08
30 . .	—46,51	- 28,62	4,96
31 . .	- 37,94	—18,67	5,40
32 . .	— 1,20	—20,12	5,75
33 . .	+ 10,16	—40,59	5,09
34 . .	— 6,09	—74,29	4,51
35 . .	—20,95	—77,10	2,39
36 . .	— 6,85	—49,97	4,39
37 . .	—66,04	—50,94	3,90
38 . .	A —19,51 y	—60,16 x	—3,57 = 0.
39. .	A — 51,34 y	—18,40 x	—4,26 = 0.
40. .	—29,05	—13,52	4,66
41. .	—13,57	—35,01	4,74
42. .	—23,64	—58,01	5,71
43. .	+ 18,15	—35,67	3,09
44. .	+ 13,48	—46,18	1,71
45. .	+ 1,76	- 63,45	2,93
46. .	—11,10	—69,42	5,39
47. .	—23,98	- 67,30	7,00
48. .	- 33,72	- 59,44	4,54
49. .	—20,06	—73,52	6,23
50. .	—13,03	—18,79	3,62
51. .	+ 3,30	- 42,32	0,78
52. .	+ 13,36	- 62,28	3,98
53. .	—22,49	—66,88	4,09
54. .	—52,92	- 26,43	1,47
55. .	- 54,96	—13,61	2,00
56. .	— 5,48	— 3,02	4,10
57. .	+ 5,24	—47,53	2,86
58. .	—46,46	—36,88	2,04
59. .	—47,47	—12,36	4,85
60. .	+12,08	- 19,21	4,61
61. .	+ 5,15	—51,97	3,50
62. .	—20,68	—57,54	5,02
63. .	—41,67	- 40,40	4,40
64. .	—45,54	—28,58	4,38
65. .	+ 18,86	- 30,70	5,27
66. .	+ 0,25	- 67,31	3,42
67. .	—14,85	—72,61	6,08
68. .	—54,22	—90,26	5,07
69. .	+13,55	—39,82	5,43
70. .	— 9,34	—83,25	4,58
71. .	— 2,84	- 43,00	4,50
72. .	- 61,29	—64,18	4,81
73. .	A —26,21 y	—69,34 x	—3,58 = 0.

Ces équations de condition conduisent aux équations normales suivantes :

$$\left.\begin{array}{rl} 73\,A - 1262\,y - 3192\,x - 4542 &= 0 \\ -1262\,A + 60063\,y + 50760\,x + 80650 &= 0 \\ -3192\,A + 50760\,y + 178190\,x + 202829 &= 0, \end{array}\right\}$$

qui donnent pour A, y et x les valeurs :

$$A = +3^s,768 \qquad \log y = \bar{2},8301347_n \qquad \log x = \bar{1},0145205_n,$$

d'où l'on déduit

$$K = -0'',1236 \qquad \text{et} \qquad L = 28^\circ,24',25''.$$

Appliquant la nutation diurne aux observations qui s'écartent le plus de la moyenne.

DATES.			Observ. Greenwich.	Nutation diurne.	Observations corrigées. de la nutation.
1869.	Avril . . .	13 *p. s.*	$1^h10^m54,74$	0,249	$54^s,491$
	Avril	26	54,59	0,359	54,231
	Avril	28	59,28	0,553	58,727
	Mai.	12	59,27	0,570	58,700
	Juin	6	53,84	0,412	53,428
	Novembre .	6	59,08	0,597	58,293.

Si l'on prend les écarts les plus grands entre les observations

$$59^s,08 - 54^s,76 = 4^s,34 \qquad 58^s,293 - 54,491 = 3^s,802$$
$$59,27 - 54,59 = 4,68 \qquad 58,700 - 54,231 = 4,469$$
$$59,28 - 53,84 = 5,44 \qquad 58,727 - 53,428 = 5,299$$

et pour les passages inférieurs :

1869.	Avril . . .	13	$1^h10^m54,71$	0,258	$54^s,452$
	Avril . . .	29	60,00	0,572	59,428
	Mai	13	59,23	0,597	58,633
	Juin. . . .	7	53,78	0,278	53,502

et pour les plus grands écarts :

$$59,23 - 54,71 = 4,52 \qquad 58^s,633 - 54,452 = 4,181$$
$$60,00 - 53,78 = 6,22 \qquad 59,428 - 53,502 = 5,926$$



α URSAE MINORIS (Washington, 1870).

$K = -0^s,175$ $L = 8^h$ E. de Greenwich.

N° d'ordre.	DATES DES OBSERVATIONS.	Temps moyen de Greenwich.	SOLEIL Asc. dr. moy.	SOLEIL Décl.	LUNE Asc. dr. moy.	LUNE Décl.	Obs. − calc.
1	1870. Février 25.	8h 0m	22h 34m	− 9° 3′	19h 4m	− 21° 27′	+ 1,86 *p. s.*
2	Mars 3.	7 35	22 56	− 6 47	0 4	− 4 23	+ 1,33
3	10.	6 57	23 22	− 4 4	5 29	+ 20 23	+ 0,35
4	16.	6 43	23 44	− 1 42	11 10	+ 9 23	+ 0,57
5	18.	6 35	23 52	− 0 54	13 4	− 1 26	+ 0,03
6	19.	6 32	23 55	− 0 31	14 0	− 6 54	− 0,50
7	23.	6 15	0 10	+ 1 4	17 48	− 21 0	+ 0,84
8	24.	6 11	0 13	+ 1 27	18 46	− 21 41	+ 0,25
9	25.	6 8	0 17	+ 1 51	19 42	− 21 10	+ 0,23
10	Avril 8.	5 13	1 8	+ 7 14	6 56	+ 21 50	− 2,75
11	12.	4 57	1 26	+ 9 4	11 37	+ 7 8	− 0,27
12	22	4 17	2 3	+ 12 33	21 11	− 18 12	+ 0,27
13	25.	4 5	2 15	+ 13 32	23 35	− 7 22	+ 1,46
14	29.	3 50	2 30	+ 14 48	2 32	+ 9 55	+ 4,82
15	Mai 1.	3 41	2 38	+ 15 26	4 6	+ 17 0	+ 0,79
16	8.	3 14	3 0	+ 17 6	10 17	+ 14 9	+ 1,87
17	11.	3 3	3 16	+ 18 9	13 0	− 1 0	+ 2,89
18	13.	2 55	3 24	+ 18 38	14 54	− 11 48	+ 0,39
19	15.	2 47	3 32	+ 19 7	16 55	− 19 36	+ 2,29
20	19.	2 31	3 48	+ 20 0	20 51	− 19 24	+ 1,61
21	Juin 6.	1 20	5 1	+ 22 46	11 45	+ 6 42	+ 0,05
22	17.	0 37	5 46	+ 23 25	22 13	− 14 38	+ 0,93
23	20.	0 25	5 59	+ 23 27	0 32	− 2 7	− 1,07
24	22.	0 17	6 8	+ 23 27	2 0	+ 6 45	− 1,77
25	24.	0 9	6 16	+ 23 24	3 31	+ 14 38	− 6,13
26	29.	23 49	6 33	+ 23 15	7 54	+ 21 32	+ 1,98
27	Juillet 14.	22 49	7 38	+ 21 52	21 50	− 16 20	− 4,99
28	17.	22 38	7 50	+ 21 2	0 15	− 3 52	+ 0,46
29	19.	22 30	7 58	+ 20 40	1 42	+ 4 58	+ 2,99
30	Mars 16.	18 43	23 46	− 1 25	11 39	+ 6 51	+ 0,29 *p. i.*
31	18.	18 35	23 55	− 0 31	13 30	− 3 58	− 1,40
32	19.	18 31	23 58	− 0 7	14 26	− 9 16	+ 1,20
33	24.	18 4	0 13	+ 1 27	19 14	− 21 34	+ 0,75
34	Avril 8.	17 4	1 11	+ 7 36	7 24	+ 21 38	− 0,74

Nº d'ordre.	DATES DES OBSERVATIONS.			Temps moyen de Greenwich.	SOLEIL. Asc. dr. moy.	SOLEIL. Décl.	LUNE. Asc. dr. moy.	LUNE. Décl.	Obs. - Calc.
35	1870.	Avril	12.	16^h56^m	1^h26^m	+ 9° 4′	$11^h\ 9^m$	+ 9°42′	- 0″,24 *p. i.*
36			23.	16 12	2 7	+ 12 53	21 37	- 16 45	+ 0,94
37			26.	16 2	2 14	+ 13 32	23 57	- 5 14	+ 1,36
38			30.	15 46	2 30	+ 14 48	2 55	+ 11 52	+ 5,40
39		Mai	2.	15 37	2 40	+ 15 42	4 30	+ 18 24	+ 0,65
40			9.	15 11	3 8	+ 17 38	10 44	+ 12 1	+ 2,70
41			12.	14 59	3 20	+ 18 24	13 28	- 3 49	+ 3,29
42			14.	14 51	3 28	+ 18 53	15 21	- 14 9	+ 0,63
43			16.	14 43	3 32	+ 19 7	17 26	- 20 47	+ 2,94
44			19.	14 31	3 44	+ 19 47	20 25	- 20 29	- 1,46
45			20.	14 27	3 52	+ 20 12	21 17	- 18 8	+ 1,56
46		Juin	1.	13 16	5 3	+ 22 48	12 12	+ 4 7	- 0,42
47			18.	12 33	5 47	+ 23 27	22 39	- 12 43	- 2,69
48			21.	12 21	5 59	+ 23 27	0 54	+ 0 8	- 2,36
49			22.	12 17	6 5	+ 23 27	1 58	+ 4 35	- 1,89
50			23.	12 13	6 10	+ 22 27	2 22	+ 8 52	- 0,82
51			24.	12 9	6 12	+ 23 24	3 8	+ 12 49	- 3,76
52			30.	11 46	6 38	+ 23 10	8 22	+ 20 44	- 2,79
53		Juillet	23.	10 15	2 10	+ 20 5	4 24	+ 18 3	- 0,27
54		Août	2.	9 35	8 49	+ 17 46	13 26	- 3 21	- 2,85
55			5.	9 23	9 1	+ 16 59	16 7	- 17 5	- 0,41
56			8.	9 11	9 13	+ 16 9	19 4	- 22 15	+ 0,02
57			12.	8 55	9 28	+ 14 58	22 44	- 12 18	- 2,16

N° d'ordre.	DATES DES OBSERVATIONS.	SOLEIL I cos(A−2T+2D) −cos(A−2T−2D)	II sin(A−2T+2D) −sin(A−2T−2D)	III cos(A−2T−α+2D) −cos(A−2T−α−2D)	IV sin(A−2T−α+2D) −sin(A−2T−α−2D)
1	1870. Février 25	+ 0,519	− 0,335	+ 0,599	− 0,161
2	Mars 3	+ 0,298	− 0,382	+ 0,173	− 0,455
3	10	+ 0,197	− 0,197	+ 0,250	− 0,125
4	16	+ 0,088	− 0,107	+ 0,077	− 0,114
5	18	+ 0,042	− 0,055	+ 0,056	− 0,040
6	19	+ 0,021	− 0,027	+ 0,027	− 0,021
7	23	− 0,039	+ 0,057	− 0,053	+ 0,044
8	24	− 0,053	+ 0,088	− 0,064	+ 0,080
9	25	− 0,069	+ 0,121	− 0,092	+ 0,104
10	Avril 8	− 0,149	+ 0,465	− 0,283	+ 0,392
11	12	− 0,149	+ 0,599	− 0,329	+ 0,525
12	22	− 0,074	+ 0,846	− 0,313	+ 0,787
13	25	− 0,032	+ 0,908	− 0,300	+ 0,863
14	29	+ 0,034	+ 0,970	+ 0,272	+ 0,941
15	Mai 1	+ 0,072	+ 1,030	+ 0,247	+ 0,999
16	8	+ 0,189	+ 1,109	+ 0,155	+ 1,109
17	11	+ 0,270	+ 1,156	+ 0,083	+ 1,176
18	13	+ 0,320	+ 1,164	+ 0,042	+ 1,204
19	15	+ 0,381	+ 1,181	+ 0,000	+ 1,232
20	19	+ 0,477	+ 1,212	+ 0,129	+ 1,286
21	Juin 6	+ 0,902	+ 1,086	+ 0,522	+ 1,311
22	17	+ 1,139	+ 0,920	+ 0,788	+ 1,226
23	20	+ 1,183	+ 0,861	+ 0,876	+ 1,168
24	22	+ 1,226	+ 0,788	+ 0,920	+ 1,139
25	24	+ 1,256	+ 0,745	+ 0,924	+ 1,095
26	29	+ 1,296	+ 0,648	+ 1,077	+ 1,022
27	Juillet 14	+ 1,333	+ 0,258	+ 1,297	+ 0,655
28	17	+ 1,326	+ 0,188	+ 1,219	+ 0,590
29	19	+ 1,312	+ 0,131	+ 1,205	+ 0,537
30	Mars 16	+ 0,063	− 0,081	+ 0,087	− 0,054
31	18	+ 0,021	− 0,027	+ 0,027	− 0,021
32	19	+ 0,000	− 0,000	+ 0,000	− 0,000
33	24	− 0,055	+ 0,088	− 0,080	+ 0,064
34	Avril 8	− 0,161	0,4[illegible]7	− 0,296	+ 0,424
35	12	− 0,156	+ 0,631	− 0,345	+ 0,552
36	23	− 0,061	+ 0,876	− 0,315	+ 0,825
37	26	− 0,032	+ 0,908	− 0,309	+ 0,865
38	30	+ 0,035	+ 1,000	− 0,280	+ 0,970
39	Mai 2	+ 0,072	+ 1,030	− 0,227	+ 1,009
40	9	+ 0,241	+ 1,127	− 0,115	+ 1,148
41	12	+ 0,283	+ 1,144	− 0,061	+ 1,176
42	14	+ 0,357	+ 1,181	− 0,021	+ 1,232
43	16	+ 0,381	+ 1,181	− 0,000	+ 1,232
44	19	+ 0,477	+ 1,212	+ 0,090	+ 1,286
45	20	+ 0,529	+ 1,199	+ 0,129	+ 1,286
46	Juin 1	+ 0,922	+ 1,109	+ 0,562	+ 1,359
47	18	+ 1,139	+ 0,920	+ 0,818	+ 1,212
48	21	+ 1,183	+ 0,861	+ 0,876	+ 1,168
49	22	+ 1,197	+ 0,832	+ 0,905	+ 1,155
50	23	+ 1,226	+ 0,788	+ 0,920	+ 1,139
51	24	+ 1,224	+ 0,765	+ 0,922	+ 1,109
52	30	+ 1,310	+ 0,634	+ 1,037	+ 0,994
53	Juillet 23	+ 1,286	+ 0,090	+ 1,212	+ 0,477
54	Août 2	+ 1,168	− 0,141	+ 1,156	+ 0,224
55	5	+ 1,109	− 0,189	+ 1,109	+ 0,155
56	8	+ 1,039	− 0,233	+ 1,060	+ 0,092
57	12	+ 0,960	− 0,290	+ 1,000	+ 0,017

LUNE					
V	VI	VII	VIII		
cos(A-2T+2D) - cos(A-2T-2D)	sin(A-2T+2D) - sin(A-2T-2D)	cos(A-2T-α+2D) - cos(A-2T-α-2D)	sin(A-2T-α+2D) - sin(A-2T-α-2D)	DATES DES OBSERVATIONS.	N° d'ordre.
+1,292	+0,449	+1,088	+0,816	1870. Février 25	1
+0,156	-0,231	+0,246	-0,193	Mars 3	2
+0,941	+0,896	+0,645	+1,135	10	3
+0,435	-0,481	+0,266	-0,598	16	4
-0,099	+0,046	-0,060	+0,083	18	5
+0,042	+0,484	-0,187	+0,450	19	6
+1,038	+0,831	+0,750	+1,112	23	7
+1,251	+0,558	+1,006	+0,911	24	8
+1,326	+0,228	+1,192	+0,630	25	9
+1,307	+0,500	+1,084	+0,876	Avril 8	10
+0,317	-0,363	+0,250	-0,416	12	11
+1,050	+0,554	+1,176	+0,103	22	12
+0,348	-0,383	+0,451	-0,260	25	13
+0,238	+0,684	-0,163	+0,663	29	14
+0,488	+1,019	+0,155	+1,109	Mai 1	15
+0,825	-0,450	+0,919	-0,178	8	16
-0,024	+0,066	-0,043	+0,054	11	17
+0,114	+0,806	-0,138	+0,805	13	18
+0,781	+0,995	+0,454	+1,184	15	19
+1,247	-0,176	+1,197	+0,428	19	20
+0,302	-0,378	+0,407	-0,264	Juin 6	21
+0,863	-0,456	+0,960	-0,165	17	22
+0,063	-0,124	+0,098	-0,098	20	23
-0,042	+0,484	-0,187	+0,450	22	24
+0,281	+0,931	0,000	+0,970	24	25
+1,346	+0,165	+1,238	+0,571	29	26
+1,014	-0,405	-1,090	-0,076	Juillet 14	27
+0,147	-0,236	+0,208	-0,183	17	28
-0,059	+0,344	-0,164	+0,309	19	29
+0,317	-0,363	+0,411	-0,254	1870. Mars 16	30
-0,061	+0,272	-0,142	+0,239	18	31
+0,010	+0,618	-0,180	+0,593	19	32
+1,346	+0,163	+1,115	+0,775	24	33
+1,319	+0,326	+1,156	+0,721	Avril 8	34
+0,435	-0,481	+0,266	-0,598	12	35
+1,035	-0,360	+1,090	-0,018	23	36
+0,205	-0,282	+0,282	-0,205	26	37
+0,114	+0,806	-0,150	+0,806	30	38
+0,636	+1,020	+0,288	+1,164	Mai 2	39
+0,659	-0,480	+0,781	-0,252	9	40
-0,061	+0,272	-0,142	+0,239	12	41
+0,244	+0,910	-0,033	+0,938	14	42
+0,964	+0,025	+0,650	+1,192	16	43
+1,312	-0,022	+1,258	+0,380	19	44
+1,144	-0,283	+1,176	+0,085	20	45
+0,147	-0,236	+0,214	-0,178	Juin 1	46
+0,474	-0,702	+0,245	+0,812	18	47
0,000	0,000	0,000	0,000	21	48
-0,059	+0,306	-0,150	+0,275	22	49
0,000	+0,618	-0,192	+0,593	23	50
+0,184	+0,858	-0,086	+0,876	24	51
+1,312	+0,000	+1,258	+0,406	30	52
+0,613	+1,014	+0,259	+1,156	Juillet 23	53
-0,059	+0,237	-0,129	+0,205	Août 2	54
+0,489	+1,019	+0,155	+1,109	5	55
+1,320	+0,459	+1,112	+0,834	8	56
+0,685	-0,499	+0,812	-0,262	12	57

N° d'ordre.	I $\frac{\cot \omega}{S}$	IV $\frac{\operatorname{tg} \delta}{S}$	II $\frac{\cot \omega}{S}$	III $\frac{\operatorname{tg} \delta}{S}$	V $\frac{f \cot \omega}{R}$	VIII $\frac{f \operatorname{tg} \delta}{R}$	VI $\frac{f \cot \omega}{R}$	VII $\frac{f \operatorname{tg} \delta}{R}$
1	+ 1,194	- 6,44	- 0,770	- 27,96	+ 6,476	+ 71,155	+ 2,253	- 95,048
2	+ 0,685	- 18,20	- 0,879	- 6,92	+ 0,788	+ 16,830	- 1,160	- 21.451
3	+ 0,453	- 5,00	- 0,453	- 10,00	+ 4,728	+ 99,408	+ 4,498	- 56,244
4	+ 0,202	- 4,56	- 0,246	- 3,08	+ 2,183	- 52,145	- 2,415	- 23,195
5	+ 0,097	- 1.60	- 0,126	- 2,24	- 0,497	+ 7,238	+ 0,231	+ 5,232
6	+ 0,048	- 0,84	- 0,062	- 1,08	- 0,211	+ 39,240	+ 2,430	+ 16,306
7	- 0,090	+ 1,76	+ 0,131	+ 2.12	+ 5,321	+ 96,792	+ 4,172	- 65,400
8	- 0,122	+ 3,20	+ 0,202	+ 2,56	+ 6,275	+ 79,439	+ 2,801	- 88,072
9	- 0,159	+ 4,16	+ 0,278	+ 3,68	+ 6,677	+ 54,936	+ 1,145	- 103,768
10	- 0,343	+ 15,68	+ 1,069	+ 11,32	+ 6,576	+ 76,387	+ 2,510	- 94,176
11	- 0,343	+ 21,00	+ 1.378	+ 13,16	+ 1,591	- 36,275	- 1,822	- 21,800
12	- 0,170	+ 31,48	+ 1,946	+ 12,52	+ 5,271	+ 8,982	+ 2,781	- 102,896
13	- 0,074	+ 34,52	+ 2,088	+ 12,00	+ 1,747	- 22,672	- 1,923	- 39,327
14	+ 0,078	+ 37,64	+ 2,231	- 10,88	+ 1,194	+ 57,814	+ 3,434	+ 14,211
15	+ 0,166	+ 39,96	+ 2,369	- 9,88	+ 2,450	+ 96,792	+ 5,120	- 13,516
16	+ 0,435	+ 44,40	+ 2,555	- 6,20	+ 4,141	- 15,522	- 2,259	- 80,137
17	+ 0,621	+ 47,20	+ 2,668	- 3,32	- 0,120	+ 4,709	+ 0,351	+ 3,749
18	+ 0,736	+ 48,00	+ 2,668	- 1,68	+ 0,572	+ 70,283	+ 4,046	+ 12,033
19	+ 0,876	+ 49,20	+ 2,714	- 0,00	+ 3,921	+ 102,896	+ 4,995	- 39,589
20	+ 1,097	+ 51,60	+ 2.783	- 3,16	+ 6,275	+ 37,322	- 0,884	- 104,640
21	+ 2,075	+ 52,40	+ 2,507	- 20,88	+ 1,516	- 25,021	- 1,898	- 35,400
22	+ 2,622	+ 49,20	+ 2,116	- 31,52	+ 4,332	- 14,388	- 2,289	- 83,712
23	+ 2,714	+ 46,80	+ 1,978	- 35,20	+ 0,316	- 8,545	- 0,622	- 85,450
24	+ 2,829	+ 45,60	+ 1,817	- 36,80	- 0,211	+ 39,240	+ 2,430	+ 16,306
25	+ 2,898	+ 44,40	+ 1,713	- 38,56	+ 1,416	+ 84,584	+ 4,674	- 209,280
26	+ 2,967	+ 40,80	+ 1,490	- 40,80	+ 0,678	+ 49,791	+ 0,818	+ 95,048
27	+ 3,059	+ 26,12	+ 0,593	- 48,00	+ 0,507	- 6,627	- 2,023	0,000
28	+ 3,036	+ 23,60	+ 0,432	- 48,80	+ 0,738	- 15,957	- 0,683	- 18,138
29	+ 3,013	+ 21,48	+ 0,501	- 48,00	- 0,296	+ 26,945	+ 1,727	+ 14,301
30	+ 0,145	- 2,16	- 0,186	- 3,48	+ 1,525	- 22,149	- 1,815	- 35,839
31	+ 0,048	- 1,08	- 0,062	- 1,08	- 0,305	+ 20,841	+ 1,360	+ 12,382
32	+ 0,000	- 0,00	- 0,000	- 0,00	+ 0,050	+ 51,710	+ 3,090	+ 15,696
33	- 0,122	+ 2 56	+ 0,202	+ 3,20	+ 6,730	+ 67,580	+ 0,815	- 96,792
34	- 0,370	+ 16,96	+ 1,143	+ 11,84	+ 6,585	+ 62,871	+ 1,630	- 100,280
35	- 0,359	+ 22,08	+ 1,451	+ 13,80	+ 2,175	- 52,146	- 2,405	- 21,195
36	- 0,140	+ 32,92	+ 2,015	+ 12,60	+ 5,175	- 1,569	- 1,800	- 95,048
37	- 0,074	+ 34,52	+ 2,088	+ 12,36	+ 1,025	- 17,876	- 1,410	- 24,590
38	+ 0,080	+ 38,80	+ 2,300	+ 11,20	+ 0,570	+ 70,283	+ 4,030	+ 11,336
39	+ 0,166	+ 49,56	+ 2,369	+ 9,08	+ 3,180	+ 101,152	+ 5,100	- 25,113.
40	+ 0,554	+ 45,92	+ 2,599	+ 4,60	+ 3,295	- 21,974	- 2,400	- 68,103
41	+ 0,651	+ 46,04	+ 2,622	+ 2,44	- 0,305	+ 20,841	+ 1,360	+ 12.382
42	+ 0,821	+ 49,28	+ 2,714	+ 0,84	+ 1,220	+ 81,794	+ 4,550	+ 2,880
43	+ 0,876	+ 49,28	+ 2,714	+ 0.00	+ 4,820	+ 103,768	+ 4,625	- 54,936
44	+ 1,097	+ 51,44	+ 2,783	- 3,60	+ 6.560	+ 33,136	- 0,110	- 109,872
45	+ 1,217	+ 51,44	+ 2.760	- 5,16	+ 5,720	+ 7,237	- 1,415	- 102.896
46	+ 2,121	+ 53,56	+ 2,553	- 22,48	+ 0,735	- 15,522	- 1,180	- 18,661
47	+ 2,622	+ 48,48	+ 2,116	- 40.90	+ 2,370	+ 70,806	- 3,510	- 21,364
48	+ 2,714	+ 46,72	+ 1,980	- 35,04	0,000	0,000	0,000	0,000
49	+ 2,760	+ 46,12	+ 1,914	- 36,20	- 0,295	+ 23,980	+ 1,530	+ 13,080
50	+ 2,829	+ 45,56	+ 1,812	- 36,80	0,000	+ 51,710	+ 3,090	+ 16,742
51	+ 2,806	+ 44,36	+ 1,755	- 36,88	+ 0,920	+ 76,387	+ 4,090	- 7,409
52	+ 3,013	+ 39,76	+ 1,458	- 41,48	+ 6,560	+ 35,403	0,000	- 109,873
53	+ 2,967	+ 19,08	+ 0,207	- 48,48	+ 3,065	+ 100,280	+ 5,070	- 22,585
54	+ 2,691	+ 8,96	- 0,324	- 46,24	- 0,295	+ 17,876	+ 1,185	+ 11,249
55	+ 2,553	+ 6,20	- 0,435	- 44,36	+ 2,445	+ 96,792	+ 5,095	- 13.516
56	+ 2,392	+ 3,68	- 0,536	- 42,40	+ 6,600	+ 72,725	+ 2,295	- 96,792
57	+ 2,208	+ 3,68	- 0,667	- 40,00	+ 3,425	- 22,846	- 2,495	- 70,806

Équations de condition.

1. A	—121,525 *y*	+ 72,385 *x*	—1,86=0.
2.	— 30,410	— 33,562	— 1,33
3.	— 62,199	+ 99,584	—0,35
4.	— 28,926	— 54,320	— 0,57
5.	+ 3,097	+ 5,238	—0,03
6.	+ 17,596	+ 38,237	+ 0,50
7.	— 58,977	+103,783	— 0,84
8.	— 82,509	+ 88,792	—0,25
9.	— 98,665	+ 65,613	—0,23
10.	— 79,277	+ 88,300	+ 2,75
11.	— 9,084	— 14,027	+ 0,27
12.	— 85,649	+ 45,563	—0,27
13.	— 27,162	+ 33,521	—1,46
14.	+ 8,996	+ 96,726	—4,82
15.	— 15,907	+139,368	—0,79
16.	— 86,043	+ 33,454	—1,87
17.	+ 3,428	+ 52,410	—2,89
18.	+ 17,067	+119,591	—0,39
19.	— 31,880	+156,893	—3,29
20.	—108,901	+ 96,294	—1,61
21.	— 55,761	+ 52,970	— 0,05
22.	—115,405	+ 41,766	— 0,93
23.	— 42,389	+ 41,285	+1,07
24.	— 16,242	+ 87,458	+1,77
25.	— 32,173	+133,298	+ 6,13
26.	—147,772	+ 94,236	—1,98
27.	+ 45,618	+ 23,059	+ 4,99
28.	— 67,189	+ 11,417	— 0,46
29. A	— 31,671 *y*	+ 51,142 *x*	—2,99=0.
30. A	— 41,32 *y*	— 22,58 *x*	—0,29=0.
31.	+ 12,60	+ 19,46	+1,40
32.	+ 18,79	+ 51,76	+1,20
33.	— 92,58	+ 76,87	— 0,75
34.	— 85,67	+ 86,06	+ 0,74
35.	— 11,35	— 28,25	+ 0,24
36.	— 82,24	+ 36,39	—0,94
37.	— 11,53	— 17,60	— 1,36
38.	+ 28,87	+109,73	— 5,40
39.	— 8,56	+144,83	—0,63
40.	— 63,30	+ 27,79	—2,70
41.	+ 18,80	+ 67,23	—3,29
42.	+ 10,98	+133,11	—0,63
43.	— 47,60	+ 158,75	—2,94
44.	—110,80	+ 92,24	+1,46
45.	—106,71	+ 65,62	—1,56
46.	— 39,77	+ 40,89	+ 0,42
47.	— 63,65	+124,28	+2,69
48.	— 33,06	+ 49,43	+2,36
49.	— 19,68	+ 72,57	+1,89
50.	— 15,16	+100,10	+0,82
51.	— 38,74	+124,48	+3,76
52.	—149,89	+ 84,73	+2,79
53.	— 65,79	+126,39	+ 0,27
54.	— 34,13	+ 29,23	+2,85
55.	— 53,21	+107,99	+ 0,41
56.	—137,43	+ 85,39	—0,02
57. A	—113,97 *y*	— 16,53 *x*	+ 2,16=0.

De ces 57 équations de condition, on peut former les 3 équations à 3 inconnues suivantes :

$$\begin{cases} 57\ A - 2679{,}55\ y - 3723{,}98\ x - 102{,}45 = 0 \\ -35 \quad + 3051{,}27 \quad + 2245{,}80 \quad - 1783{,}50 = 0 \\ -43 \quad + 2186{,}37 \quad + 4052{,}56 \quad + 11{,}25 = 0. \end{cases}$$

qui donneront les valeurs suivantes :

$$A = +\ 0^s{,}794 \qquad \log x = \bar{2}{,}48477 \qquad \log y = \bar{1}{,}24343$$

et par conséquent

Asc. dr. moy. $= 1^h 11^m 18^s{,}464$; $K = -\ 0'',175$, $L = 8''$ à l'Est de Greenwich.

Introduisant ces valeurs dans les équations de condition correspondantes aux observations qui présentent le plus grand écart, on aura :

Avril. . .	29 *p. s.*	$1^h 11^m 22^s{,}49$	$1^h 11^m 22{,}58$
Août. . .	2	$1^h 11^m 14^s{,}92$	$1^h 11^m 15{,}97$
Écart.		$7^s{,}57$	$6^s{,}61$
Avril. . .	30 *p. i.*	$1^h 11^m 23^s{,}07$	$1^h 11^m 22{,}97$
Août. . .	2	$1^h 11^m 14^s{,}82$	$1^h 11^m 15{,}25$
Écart.		$8^s{,}25$	$7^s{,}72$

L'introduction de la nutation diurne dans les observations les plus discordantes reserre donc les limites des variations.

δ URSAE MINORIS (Pulkowa).

K = — 0″,321   L = 52°30′ W. de Greenwich.

Nº d'ordre.	DATES DES OBSERVATIONS.	Temps moyen de Greenwich.	SOLEIL. Asc. dr. moy.	SOLEIL. Décl.	LUNE. Asc. dr. moy.	LUNE. Décl.	Asc. droite observée.
	Passage supér.						
1	1869. Fév. 16.	18h25m	22h 0m	− 12°12′	18h30m	+ 2°52′	12h15m53s,50
2	21.	12 5	22 20	− 10 26	81 0	+ 18 50	53,37
3	Mars 16.	17 35	23 45	− 1 36	26 45	+ 5 59	52,63
4	17.	16 52	23 48	− 1 12	15 0	+ 1 40	53,01
5	Sept. 2.	5 27	10 46	+ 7 19	113 13	+ 20 17	53,33
6	4.	5 19	10 53	+ 7 5	143 15	+ 15 48	53,11
7	6.	5 12	11 1	+ 6 20	172 45	+ 7 1	53,17
8	18.	4 21	11 44	+ 1 45	334 30	− 12 51	52,66
	Passage infér.						
9	1869. Fév. 20.	6 12	22 16	− 10 47	4 56	+ 17 57	6h15m53,35
10	25.	5 52	22 36	− 8 57	9 54	+ 13 41	52,90
11	Mars 16.	4 38	23 45	− 1 36	0 37	− 0 22	53,50
12	Sept. 2.	17 24	10 46	+ 7 49	7 3	+ 20 38	53,08
13	4.	17 16	10 53	+ 7 5	9 3	+ 17 24	53,05
14	8.	17 9	11 0	+ 6 20	11 2	+ 9 30	53,24
15	9.	16 57	11 11	+ 5 12	13 53	− 6 6	53,09
16	12.	16 45	11 21	+ 4 6	16 40	+ 17 51	53,27

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	117°36′	166°24′	203°36′	252°24′	196°14	184°46′	282°14′	270°46′
2	126 2	167 52	212 8	253 52	290 40	215 20	16 40	301 20
3	165 3	171 27	251 3	257 27	210 43	186 47	296 43	272 47
4	166 36	171 24	252 36	257 24	190 20	183 40	276 20	269 40
3	349 8	317 52	75 8	43 52	325 49	244 41	51 49	330 41
6	349 25	321 5	75 25	47 5	346 51	283 39	72 51	9 39
7	349 55	324 25	75 55	51 35	358 47	330 43	84 47	56 43
8	351 30	344 30	77 30	70 30	120 48	172 12	206 48	258 12
9	124 26	167 34	240 26	253 34	281 54	210 6	7 54	296 6
10	133 6	168 54	219 6	254 54	347 37	292 53	73 37	18 53
11	165 3	171 27	251 3	257 27	180 31	181 59	266 31	207 59
12	349 8	317 52	75 8	43 52	318 1	237 29	44 1	323 29
13	349 25	321 5	73 25	47 5	342 33	272 57	68 33	358 57
14	350 10	324 50	76 10	50 50	318 30	318 0	44 30	44 0
15	350 9	329 21	76 9	55 21	18 3	32 27	94 3	118 27
16	350 27	334 3	76 27	60 3	26 18	97 42	112 18	183 42

$$A = \cot\omega\left[\frac{1}{s}\cos(A + 2D - 2t) - \frac{1}{r}\cos(A - 2D - 2t)\right] \qquad E = \cot\omega\left[\frac{1}{s}\cos(A' + 2D' - 2t) - \frac{1}{r}\cos(A' - 2D' - 2t)\right]$$

$$B = \cot\omega\left[\frac{1}{s}\sin(A + 2D - 2t) - \frac{1}{r}\sin(A - 2D - 2t)\right] \qquad F = \cot\omega\left[\frac{1}{s}\sin(A' + 2D' - 2t) - \frac{1}{r}\sin(A' - 2D' - 2t)\right]$$

$$C = -\operatorname{tg}\delta\left[\frac{1}{s}\sin(A + 2D - \alpha - 2t) - \frac{1}{r}\sin(A - 2D - \alpha - 2t)\right] \qquad G = -\operatorname{tg}\delta\left[\frac{1}{s}\sin(A' + 2D' - \alpha - 2t) - \frac{1}{r}\sin(A' - 2D' - \alpha - 2t)\right]$$

$$D = \operatorname{tg}\delta\left[\frac{1}{s}\cos(A + 2D - \alpha - 2t) - \frac{1}{r}\sin(A - 2D - \alpha - 2t)\right] \qquad H = \operatorname{tg}\delta\left[\frac{1}{s}\cos(A' + 2D' - \alpha - 2t) - \frac{1}{r}\sin(A' - 2D' - \alpha - 2t)\right]$$

On a de plus $\operatorname{tg}\delta = 16{,}83$, $\cot\omega = 2{,}30$, $f = 2{,}18$.

Nº d'ordre.	A'	B'	C'	D'	E'	F'	G'	H'
1	+ 73	+ 58	- 454	- 505	- 48	+ 10	- 37	+ 348
2	+ 69	+ 45	- 362	- 479	- 90	+ 296	- 2104	+ 805
3	+ 11	+ 2	- 17	- 93	- 10	+ 32	- 201	+ 732
4	+ 7	+ 2	- 8	- 50	- 25	+ 5	- 18	+ 183
5	+ 55	+ 22	- 235	- 387	+ 88	+ 314	- 2324	- 457
6	+ 51	+ 23	- 202	- 353	+ 191	+ 191	- 1445	- 1262
7	+ 48	+ 20	- 151	- 320	+ 115	+ 53	- 293	- 823
8	+ 14	+ 2	+ 25	- 101	+ 181	+ 118	- 860	- 952
9	+ 71	+ 48	- 387	- 496	- 120	+ 166	- 1903	+ 1006
10	+ 62	+ 34	- 285	- 437	+ 178	+ 148	- 1153	+ 1226
11	+ 12	+ 2	- 17	- 93	+ 3	—	—	- 36
12	+ 55	+ 28	- 235	- 387	+ 43	+ 321	- 2361	- 146
13	+ 51	+ 23	- 201	- 353	+ 183	+ 228	- 1737	- 1171
14	+ 46	+ 18	- 160	- 328	+ 3	+ 2	- 36	- 18
15	+ 40	+ 14	- 126	- 278	- 55	+ 25	- 220	+ 732
16	+ 29	+ 8	- 84	- 219	- 138	+ 261	- 1830	+ 1153

Avec ces données, on forme les équations de condition suivantes :

$$A - 1{,}32\,y - 4{,}23\,x - 1^s{,}50 = 0$$
$$A + 3{,}05 - 21{,}31 - 1^s{,}57 = 0$$
$$A + 6{,}40 - 1{,}84 - 0^s{,}63 = 0$$
$$A + 1{,}15 - 0{,}19 - 1^s{,}01 = 0$$
$$A - 7{,}01 - 22{,}17 - 1^s{,}33 = 0$$
$$A - 13{,}73 - 14{,}33 - 1^s{,}11 = 0$$
$$A - 9{,}80 - 3{,}29 - 1^s{,}17 = 0$$
$$A - 8{,}58 - 7{,}65 - 0^s{,}66 = 0$$

$$A + 4{,}61 - 20{,}76 - 1^s{,}35 = 0$$
$$A - 14{,}23 - 12{,}56 - 0^s{,}90 = 0$$
$$A - 1{,}14 - 0{,}15 - 1^s{,}50 = 0$$
$$A - 4.35 - 22{,}47 - 1^s{,}08 = 0$$
$$A - 12{,}90 - 16{,}87 - 1^s{,}05 = 0$$
$$A - 2{,}97 - 1{,}76 - 1^s{,}24 = 0$$
$$A + 4{,}39 - 3{,}07 - 1^s{,}09 = 0$$
$$A + 8{,}25 - 16{,}45 - 1^s{,}27 = 0$$

Les équations normales qui s'en déduisent sont :

$$\begin{array}{rrrr} 16\,A & -\ 48{,}18\,y & -\ 169{,}10\,x & -\ 18{,}46 = 0, \\ -\ 48{,}18 & +\ 965{,}48 & +\ 632{,}15 & +\ 48{,}44 = 0, \\ -\ 169{,}10 & +\ 632{,}15 & +\ 2901{,}40 & +\ 199{,}90 = 0, \end{array}$$

Leur résolution fournit pour les inconnues les valeurs suivantes :

$$A = 1^s{,}159 \quad \log x = \bar{3}{,}7289808 \quad \log y = \bar{2}{,}3170181.$$
$$x = -\ 0^s{,}0054 \qquad y = 0^s{,}021$$

qui donneront pour

$$Æ(1865) = 18^h15^m53^s{,}159;\quad K = -\ 0'',321;\quad L = 82^\circ45' \text{ W. de Pulkowa,}$$
$$\text{ou } 52^\circ30' \text{ W. de Greenwich.}$$

Si l'on prend les observations qui présentent le plus grand écart, et si on les corrige de la nutation diurne, on aura :

	Æ (Pulkowa).		Æ corrigées.
2)	$18^h15^m53^s{,}57$		$18^h15^m53^s{,}39$
3)	$18^h15^m50^s{,}63$		$50^s{,}75$
Écart. . . .	$2^s{,}94$	Écart. . . .	$2^s{,}64$

λ URSAE MINORIS (Bruxelles).

K = — 0″100 L = 26° W. de Greenwich.

N° d'ordre.	DATES DES OBSERVATIONS.			Temps moyen de Greenwich.	SOLEIL. Asc. dr. moy.	SOLEIL. Décl.	LUNE. Asc. dr. moy.	LUNE. Décl.	Asc. droite observée.	Asc. droite calculée.
1	1861.	Janv.	29.	$11^h\ 8^m$	20^h50^m	−17°42′	11^h30^m	− 1°49′	$8^h1^m23^s,28$	$20^s,86$
2		Mars	4.	8 55	23 2	− 6 10	17 49	−25 31	31,02	35,66
3			14.	8 16	23 38	− 2 16	1 44	+16 5	42,60	43,93
4			23.	7 40	0 11	+ 1 14	9 43	+10 39	52,50	52,40
5			30.	7 14	0 36	+ 3 58	16 26	−24 59	2^m 0,05	0,51
6		Avril	1.	7 5	0 43	+ 4 44	12 27	−24 25	1,31	1,57
7			4.	6 53	0 54	+ 5 54	21 5	−14 25	7,56	4,79
8			10.	6 29	1 16	+ 8 9	1 29	+14 40	10,33	11,22
9		Août	12.	10 22	9 30	+14 46	12 52	−11 12	20^h3^m 3,50	3,65
10		Sept.	2.	8 57	10 47	+ 7 42	8 59	+14 22	2 46,93	48,70
11			11.	8 22	11 19	+ 4 20	17 27	−24 52	2 38,47	39,15
12	1862.	Février	25.	9 30	22 35	− 8 56	20 16	−17 9	$8^h0^m34,76$	37,92
13		Mars	1.	9 8	22 49	− 7 26	23 34	+ 2 43	36,25	40,46
14			14.	8 17	23 16	− 4 44	10 23	+ 5 10	50,80	51,15
15		Juillet	25.	11 31	8 20	+19 34	7 33	+19 20	$20^h2^m18,98$	19,81
16		Août	13.	10 16	9 33	+14 32	0 54	+ 8 56	8,92	11,40
17			30.	9 10	10 35	+ 8 53	14 54	−19 39	0,50	58,97
18		Sept.	4.	8 51	10 52	+ 7 11	19 55	−17 49	0,06	54,40
19			11.	9 23	11 18	+ 4 27	1 52	+15 36	$1^m46,19$	47,63
20			18.	7 55	11 43	+ 1 46	7 45	+18 23	41,85	40,37
21			30.	7 8	12 26	− 2 56	18 38	−21 26	27,12	26,57
22		Oct.	24.	5 35	13 55	−11 46	18 59	−20 16	$0^m56,22$	55,49

N° d'ordre.	SOLEIL				LUNE			
	$A_0-2T+2D$	$A_0-2T-2D$	$A-2T-\alpha+2D$	$A-2T-\alpha-2D$	$A'+2T-2D'$	$A'-2T-2D'$	$A'-2T-\alpha+2D'$	$A'-2T-\alpha-2D'$
1	18° 6′	88°54′	95°36′	166°24′	287°52′	295° 8′	347°22′	354°38′
2	92 10	116 50	151 40	176 20	335 13	77 17	34 43	136 47
3	109 8	118 2	168 28	177 32	177 10	112 50	256 40	172 20
4	123 58	119 2	183 43	178 47	286 3	243 27	345 33	302 57
5	135 56	120 4	195 26	179 34	315 32	55 28	15 2	114 58
6	139 13	120 17	198 43	179 47	345 55	85 30	45 25	145 5
7	144 18	120 42	203 48	180 12	46 25	104 5	105 55	163 35
8	154 18	121 42	213 48	181 12	170 35	111 55	230 5	171 25
9	279 2	243 58	338 32	303 28	289 36	334 24	349 6	33 54
10	296 5	265 21	355 39	324 51	282 29	225 1	341 59	284 31
11	297 25	280 5	356 55	339 35	341 1	70 29	30 31	129 59
12	79 53	115 37	139 23	175 7	28 42	97 18	88 12	156 48
13	86 23	116 7	145 53	175 37	117 56	107 4	177 26	166 34
14	98 32	117 28	158 2	176 58	285 5	264 25	194 35	173 55
15	283 8	204 52	342 38	264 22	270 55	193 35	330 25	253 5
16	291 19	233 11	350 49	292 41	145 22	109 38	204 52	169 8
17	295 31	259 59	355 1	319 29	303 12	21 48	2 42	81 18
18	296 22	267 38	355 52	327 8	22 17	93 23	81 37	152 53
19	297 24	279 36	356 54	339 6	178 12	115 48	28 12	325 48
20	298 17	291 13	357 47	350 43	272 1	198 29	331 31	257 59
21	299 38	311 22	359 8	10 52	355 38	81 22	55 8	140 52
22	304 13	351 17	3 43	50 47	3 13	84 17	62 43	143 47

N° d'ordre.	I	II	III	IV	I′	II′	III′	IV′
1	− 79	+ 23,14	+ 5	− 1,74	+ 107	− 19,95	+ 13	+ 7,54
2	+ 13	+ 3,19	− 349	+ 89,90	+ 48	− 10,64	+ 173	+ 6,38
3	+ 8	+ 0,53	− 218	+ 24,94	+ 16	− 4,79	− 155	+ 56,26
4	− 5	—	− 17	+ 24,94	− 9	+ 2,39	+ 183	− 34,80
5	− 21	+ 0,80	− 379	+ 80,62	− 25	+ 6,92	+ 38	+ 37,70
6	− 24	+ 1,33	− 311	+ 88,74	− 29	+ 8,25	+ 223	− 8,12
7	− 31	+ 2,13	− 63	+ 39,44	− 33	+ 10,04	+ 233	− 39,44
8	− 47	+ 4,26	− 193	+ 20,30	− 43	+ 13,83	− 156	+ 53,94
9	− 12	+ 10,37	− 125	+ 8,70	+ 70	− 12,77	− 141	+ 43,50
10	+ 12	+ 4,79	− 68	+ 40,62	+ 61	− 13,30	+ 231	− 38,28
11	+ 13	+ 1,60	− 319	+ 87,58	+ 41	− 7,71	+ 153	+ 25,08
12	+ 9	+ 6,65	− 126	+ 55,10	+ 70	− 15,16	+ 248	− 36,54
13	+ 12	+ 4,52	− 20	− 1,74	+ 59	− 13,03	− 45	+ 9,86
14	+ 12	+ 1,86	+ 5	+ 1,16	+ 33	− 8,51	+ 90	+ 20,88
15	− 63	+ 28,02	− 188	+ 67,28	+ 130	− 18,62	+ 248	− 26,68
16	− 15	+ 15,96	− 92	+ 109,62	+ 112	− 20,22	− 120	+ 35,38
17	+ 9	+ 6,65	− 300	+ 48,72	+ 70	− 15,16	− 98	+ 54,52
18	+ 12	+ 4,26	− 156	+ 59,74	+ 54	− 12,50	+ 246	− 31,32
19	+ 10	+ 1,86	− 216	+ 0,58	+ 32	− 82,46	− 141	− 59,74
20	+ 8	+ 2,66	− 171	+ 63,22	+ 17	− 34,52	+ 246	− 29,58
21	− 14	+ 5,32	− 263	+ 78,30	− 18	+ 5,59	+ 211	− 11,02
22	− 75	+ 9,84	− 236	+ 73,08	− 46	+ 18,89	+ 226	− 17,40

Avec ces données on peut former les équations de condition :

1.	$+ 21,66\, y$	$- 11.21\, x$	$- 2,42 = 0$	12.	$+ 60,58\, y$	$- 48,52\, x$	$+ 3,16 = 0$
2.	$+ 89,73$	$- 2,05$	$+ 4,64 = 0$	13.	$+ 2,70$	$- 3,03$	$+ 4,21 = 0$
3.	$+ 23,37$	$+ 50,10$	$+ 1,33 = 0$	14.	$+ 3,19$	$+ 13,61$	$+ 0,35 = 0$
4.	$+ 24,71$	$- 30,67$	$- 0,10 = 0$	15.	$+ 92,97$	$- 41,52$	$+ 0,83 = 0$
5.	$+ 77,42$	$+ 44,75$	$+ 0,46 = 0$	16.	$+ 124,51$	$+ 15,08$	$+ 2,48 = 0$
6.	$+ 86,72$	$+ 2,07$	$+ 0,26 = 0$	17.	$+ 52,46$	$+ 39,08$	$- 1,53 = 0$
7.	$+ 40,63$	$- 27,40$	$- 2,77 = 0$	18.	$+ 62,56$	$- 40,82$	$- 5,56 - 0$
8.	$+ 22,16$	$+ 65,78$	$+ 0,89 = 0$	19.	$+ 0,38$	$- 69,08$	$+ 1,44 = 0$
9.	$+ 17,70$	$+ 30,02$	$+ 0,15 = 0$	20.	$+ 64,25$	$- 30,41$	$- 1,48 = 0$
10.	$+ 44,25$	$- 48,66$	$+ 1,77 = 0$	21.	$+ 80,85$	$- 3,50$	$- 0,55 = 0$
11.	$+ 86,12$	$+ 9,61$	$+ 0,58 = 0$	22.	$+ 79,45$	$+ 3,29$	$+ 0,27 = 0$

Ces équations de condition donneront pour équations normales :

$$\left\{\begin{array}{l} 86267\, y + 5379\, x + 544,49 = 0 \\ 5379\, y + 27397\, x + 187,67 = 0 \end{array}\right.$$

qui sont satisfaites par

$$\log x = \bar{3},7543705_n \quad \text{et} \quad \log y = \bar{3},77815_n \ \text{(en secondes de temps)}$$

$$\text{ou} \quad \log x = \bar{2},9304618_n \quad \text{et} \quad \log y = \bar{2},95424_n$$

d'où l'on déduit

$$K = -0'',124 \quad \text{et} \quad L = 22^{\circ}\ \text{W. de Bruxelles,}$$

$$\text{ou} \quad L = 18^{\circ}\ \text{W. de Greenwich.}$$

En introduisant, une troisième inconnue, A, représentant l'erreur commise sur l'ascension droite moyenne adoptée dans les réductions, on aurait pour équations normales :

$$\left\{\begin{array}{l} 22\, A + 1157\, y + 63\, x + 8,51 = 0 \\ 1157\, A + 86267\, y + 5379\, x + 544,49 = 0 \\ 63\, A + 5379\, y + 27397\, x + 187,67 = 0 \end{array}\right.$$

qui donneraient pour les inconnues les valeurs suivantes :

$$A = -0^{s},196 \quad \log x^{s} = \bar{3},7593557_n \quad \log y^{s} = \bar{3},5237465_n$$

$$\log x'' = \bar{2},9354470_n \quad \log y'' = \bar{2},6998378_n$$

d'où l'on déduirait

$$K = -0'',100 \quad \text{et} \quad L = 30^{\circ}\ \text{W. de Bruxelles.}$$

$$\text{ou} \quad L = 26^{\circ}\ \text{W. de Greenwich.}$$

valeurs qui concordent avec les précédentes.

σ OCTANTIS (Cordoba, 1874).

K = — 0^s,11 L = 26° W. de Greenwich.

N° d'ordre.	DATES DES OBSERVATIONS.		Temps moyen de Greenwich.	SOLEIL Asc. dr. moy.	SOLEIL Décl.	LUNE Asc. dr. moy.	LUNE Décl.	Asc. droite observée.
1	1874. Sept.	10.	11^{h}14^m	11^{h}16^m	+ 4° 43′	11^{h}29^m	+ 6° 43′	18^{h}13^{m}38^s,68
2		11.	11 10	11 20	+ 4 20	12 12	+ 1 6	38,84
3		12.	11 6	11 23	+ 3 57	12 54	- 4 31	38,92
4		13.	11 2	11 26	+ 3 34	13 40	- 10 23	37,28
5		14.	10 58	11 30	+ 3 10	14 20	- 15 1	38,60
6		15.	10 54	11 33	+ 2 48	15 14	- 20 15	38,97
7		16.	10 50	11 37	+ 2 24	15 55	- 23 21	36,68
8		17.	10 46	11 41	+ 2 2	16 46	- 26 12	37,11
9		18.	10 42	11 44	+ 1 38	17 41	- 27 52	38,77
10		19.	10 34	11 48	+ 1 13	18 36	- 28 9	38,75
11		23.	10 22	12 2	- 0 18	22 25	- 14 27	39,12
12		24.	10 18	12 6	- 0 42	23 19	- 7 59	38,87

d'ordre.	I	II	III	IV	I′	II′	III′	IV′
1	+ 0,097	+ 0,300	+ 13,04	- 5,00	+ 0,250	+ 0,938	+ 40,02	- 13,18
2	+ 0,081	+ 0,267	+ 11,84	- 4,24	+ 0,010	+ 0,140	+ 6,09	- 0,87
3	+ 0,078	+ 0,270	+ 10,56	- 3,96	+ 0,062	+ 0,624	- 1,74	+ 26,97
4	+ 0,068	+ 0,234	+ 9,28	- 3,24	+ 0,448	+ 1,300	- 57,42	+ 15,66
5	+ 0,052	+ 0,202	+ 7,92	- 2,48	+ 0,940	+ 1,780	- 79,17	+ 36,54
6	+ 0,048	+ 0,202	+ 6,68	- 2,00	+ 1,728	+ 1,814	- 88,74	+ 70,47
7	+ 0,040	+ 0,169	+ 5,36	- 1,56	+ 2,246	+ 1,390	- 84,39	+ 93,09
8	+ 0,029	+ 0,137	+ 5,36	- 1,44	+ 2,876	+ 0,698	- 66,12	+ 120,93
9	+ 0,019	+ 0,102	+ 4,04	- 0,96	+ 3,252	- 0,116	- 37,41	+ 140,07
10	+ 0,012	+ 0,069	+ 2,72	- 0,64	+ 3,316	- 1,614	- 2,61	+ 144,42
11	- 0,004	+ 0,034	- 1,60	+ 0,40	+ 0,956	+ 1,934	+ 67,86	+ 132,25
12	- 0,003	+ 0,034	- 1,36	+ 0,20	+ 0,342	- 1,058	+ 18,27	+ 45,24

Les équations de condition sont :

1.	$A - 16{,}94\,y$	$+ 27{,}33\,x$	$- 2{,}68 = 0$
2.	$A - 4{,}70$	$- 11{,}14$	$- 2{,}84 = 0$
3.	$A + 23{,}90$	$- 10{,}59$	$- 2{,}92 = 0$
4.	$A + 13{,}95$	$- 66{,}18$	$- 1{,}28 = 0$
5.	$A + 36{,}04$	$- 86{,}10$	$- 2{,}60 = 0$
6.	$A + 70{,}60$	$- 93{,}64$	$- 2{,}97 = 0$
7.	$A + 93{,}51$	$- 87{,}46$	$- 0{,}68 = 0$
8.	$A + 121{,}02$	$- 68{,}57$	$- 1{,}11 = 0$
9.	$A + 139{,}91$	$- 38{,}18$	$- 2{,}77 = 0$
10.	$A + 143{,}73$	$- 2{,}00$	$- 2{,}75 = 0$
11.	$A + 131{,}06$	$+ 70{,}42$	$- 3{,}12 = 0$
12.	$A + 44{,}41$	$+ 19{,}97$	$- 2{,}87 = 0.$

D'où l'on peut former les trois équations suivantes, ou A, y et x ont les coefficients les plus grands :

$$12\,A + 796{,}49\,y - 346{,}14\,x - 28{,}59 = 0$$
$$8\,A + 839{,}77\,y - 378{,}52\,x - 17{,}55 = 0$$
$$-6\,A - 479{,}43\,y + 581{,}58\,x + 11{,}25 = 0.$$

Ces équations donnent les valeurs suivantes :

$$A = +2^s{,}69 \qquad \log x = \bar{3}{,}85340 \qquad \log y = \bar{3}{,}19590_n$$
$$x = +0^s{,}007 \qquad y = -0^s{,}0015$$

et par conséquent :

$$Æ_m\,(1874) = 18^h13^m38^s{,}69; \qquad K = -0'',11 \quad \text{et} \quad L = 141^\circ\text{W. de Cordoba.}$$
$$\text{ou } L = 26^\circ\text{W. de Greenwich.}$$

Si l'on remplace x et y par leurs valeurs dans les équations 11 et 7 qui présentent le plus grand écart par rapport à la valeur d'$Æ_m$, on aura :

	Ascensions droites de Cordoba.		Ascensions droites corrigées.
11.	$18^h13^m39^s{,}12$		$18^h13^m38^s{,}83$
7.	$18^h13^m36^s{,}68$		$18^h13^m37^s{,}43$
Écart. . .	$2^s{,}44$	Écart. . .	$1^s{,}40$

D. M. + 88°,117 (R. Cephei).

K = — 0″,136   K = 17°W. de Greenwich.

Nº d'ordre.	DATES DES OBSERVATIONS.	Temps moyen de Greenwich.	SOLEIL. Asc. dr. moy.	SOLEIL. Décl.	LUNE. Asc. dr. moy.	LUNE. Décl.	Asc. droite observée.
1	1863. Février 20.	10h 5m	22h 15m	− 10°50′	0h 24m	+ 7°29′	20h34m42s,33 *p. i.*
2	27.	9 38	22 42	− 8 16	6 19	+ 21 26	42,75 *p. i.*
3	Mars 1.	9 30	22 49	− 7 30	7 58	+ 16 57	39,89 *p. i.*
4	Oct. 27.	5 45	14 6	− 12 48	2 52	+ 17 41	39,97
5	28.	5 41	14 10	− 13 8	3 46	+ 19 51	41,53
6	Nov. 1.	5 25	14 26	− 14 26	7 7	+ 18 36	41,31
7	14.	4 34	15 18	− 18 15	18 25	− 20 2	40,53
8	1864. Avril 8.	6 58	1 8	+ 7 12	3 3	+ 17 17	40,28 *p. i.*

Nº d'ordre.	A+2D−2T I	A−2D−2T II	A+2D−α−2T III	A−2D−α−2T IV	A′+2D′−2T V	A′−2D′−2T VI	A′+2D′−α−2T VII	A′−2D′−α−2T VIII
1	+ 56°35′	+ 97°55′	+ 105°50′	+ 127°30′	− 236°32′	− 266°28′	− 185°17′	− 215°13′
2	+ 26 28	+ 99 32	+ 117 44	+ 134 16	− 119 53	− 205 37	− 68 38	− 154 22
3	+ 69 45	+ 99 45	+ 121 0	+ 136 0	− 104 6	− 171 54	− 25 46	− 120 34
4	− 71 36	− 20 32	− 20 21	+ 5 15	− 119 8	− 249 52	− 127 53	− 198 37
5	− 89 16	− 18 44	− 20 1	+ 6 15	− 161 18	− 240 42	− 110 3	− 189 27
6	− 70 7	− 12 23	− 18 52	+ 10 0	− 113 33	− 187 57	− 62 18	− 136 42
7	− 64 30	+ 8 30	− 23 15	+ 13 15	− 21 19	+ 18 45	+ 29 56	+ 110 2
8	− 226 6	− 254 54	− 174 51	− 189 13	− 177 11	− 246 19	− 125 56	− 195 4

Nº d'ordre.	sin I − sin II *a*	cos I − cos II *b*	cos III − cos IV *c*	sin IV − sin III *d*	sin V − sin VI *e*	cos V − cos VI *f*	cos VII − cos VIII *g*	sin VII − sin VIII *h*
1	− 0,1744	+ 0,7174	+ 0,3359	− 0,1687	− 0,1642	− 0,4909	− 0,1781	+ 0,4810
2	− 0,5401	+ 1,0599	+ 0,2345	− 0,1703	− 1,3006	+ 0,4038	+ 1,2651	+ 0,4982
3	− 0,0466	+ 0,5155	+ 0,2043	− 0,1625	− 0,8276	+ 0,7451	+ 1,1116	+ 0,0647
4	− 0,3990	− 0,6211	− 0,0579	+ 0,4404	− 1,8119	− 0,1426	+ 0,3341	+ 1,0098
5	− 0,6795	− 0,9358	− 0,0342	+ 0,4523	− 1,1918	− 0,4575	+ 0,6438	+ 1,1047
6	− 0.7271	− 0,6370	− 0,0384	+ 0,4964	− 1,0561	+ 0,5915	+ 1,1916	+ 0,1994
7	− 1,0504	− 0,5585	− 0,0348	+ 0,6267	− 0,6866	− 0,0149	+ 1,2080	+ 0,4397
8	− 0,1838	− 0,2673	− 0,0092	+ 0,2522	− 0,9653	− 0,5974	+ 0,3781	+ 1,0678

$$\frac{\cos\omega}{s} = 1,15, \quad \frac{f\cos\omega}{r} = 2,51; \qquad \frac{\operatorname{tg}\delta}{s} = 21,7, \quad \frac{f\operatorname{tg}\delta}{r} = 24,955.$$

N° d'ordre.	$\frac{\cot \omega}{s} a$	$\frac{\cot \omega}{s} b$	$\frac{f \operatorname{tg}}{s} c$	$\frac{\operatorname{tg} \delta}{s} d$	$\frac{f \cot \omega}{r} e$	$\frac{f \cot \omega}{r} f$	$\frac{f \operatorname{tg} \delta}{r} g$	$\frac{f \operatorname{tg} \delta}{r} h$
1	- 0,1955	+ 0,8280	+ 7,378	- 3,689	- 0,4105	- 1,227	- 4,452	+ 12,025
2	- 0,6210	+ 1,2190	+ 4,991	- 3,689	- 3,2500	+ 1,009	+ 31,630	+ 12,455
3	- 0,0575	+ 0,5980	+ 4,340	- 3,472	- 2,0690	+ 1,863	+ 27,790	+ 1,618
4	- 0,6900	- 0,7130	- 1,302	+ 9,548	- 4,5300	- 0,454	+ 8,352	+ 25,145
5	- 0,7820	- 1,0810	- 1,085	+ 9,765	- 2,9800	- 1,144	+ 16,095	+ 27,620
6	- 0,8395	- 0,7360	- 0,868	+ 1,050	- 2,6402	+ 1,480	+ 29,790	+ 4,985
7	- 1,2075	- 0,6440	- 1,085	+ 13,671	- 1,7140	- 0,037	+ 30,200	+ 1,099
8	- 0,2070	- 0,3105	- 0,195	+ 5,425	- 2,4130	- 1,494	+ 9,452	+ 26,695

Avec ces données, on formera les équations de condition :

$$
\begin{array}{ll}
1. & A + 2,320\,y + 14,487 - 49'',95 = 0 \\
2. & A + 32,750 + 14,766 - 56 = 0 \\
3. & A + 30,004 + 4,349 - 13 = 0 \\
4. & A + 1,830 + 33,037 - 14 = 0 \\
5. & A + 11,248 + 35,156 - 37,95 = 0 \\
6. & A + 25,442 + 6,647 - 34,65 = 0 \\
7. & A + 26,194 + 13,648 - 22,95 = 0 \\
8. & A + 6,637 + 30,431 - 19,20 = 0.
\end{array}
$$

et les équations normales :

$$
\begin{array}{l}
8\,A + 136,425\,y + 152,521\,x - 248,85 = 0 \\
136,42\,A + 3478,42\,y + 1818,75\,x - 4409,36 = 0 \\
152,52\,A + 1818,75\,y + 3928,50\,x - 4548,56 = 0,
\end{array}
$$

qui donneront :

$$A = 0^s,096 \qquad x = -0'',102 \qquad y = 0'',090$$

d'où

$$Æ_m = 20^h 34^m 41^s,096 \qquad K = -0'',13 \qquad L = 17^\circ \text{W. de Greenwich.}$$



Si l'on remplace les inconnues par leurs valeurs dans les équations de condition, on a

DATES.			Asc. droite BB VI	Observations corrigées.
1863.	Février	20	20h34m42s,33	41,01
	Février	27	42s,75	41,19
	Mars	1	39s,89	41,25
	Octobre. . . .	27	39s,97	40,89
	Octobre. . . .	28	41s,53	40,93
	Novembre. . .	1	41s,31	41,20
	Novembre. . .	14	40s,53	41,16
1864.	Avril	8	40s,28	40,93.

MÉMOIRE

SUR QUELQUES FORMULES

DE

CALCUL INTÉGRAL,

PAR

J. BEAUPAIN,

DOCTEUR ÈS-SCIENCES, INGÉNIEUR AU CORPS DES MINES.

(Présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 2 juin 1888.)

MÉMOIRE

SUR QUELQUES FORMULES

DE

CALCUL INTÉGRAL.

Jusqu'ici, on n'a pas remarqué suffisamment, je pense, l'utilité des développements, en série trigonométrique, des fonctions

$$\cos^p\varphi\cos q\varphi,\quad \cos^p\varphi\sin q\varphi,\quad \sin^p\varphi\cos q\varphi,\quad \sin^p\varphi\sin q\varphi,$$

pour l'étude de certaines intégrales définies.

Dans le tome VIII du *Journal de Liouville,* A. Serret détermine la valeur des intégrales des fonctions précédentes et de quelques autres fonctions analogues prises entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$. Le procédé d'intégration, fondé sur le développement de ces fonctions, en série trigonométrique, conduit à plusieurs formules que je crois nouvelles, à la simplification et à la généralisation de certains résultats obtenus par A. Serret, Schlömilch et d'autres géomètres. Dans ce mémoire, je n'ai fait qu'appliquer une méthode bien connue, appartenant à la théorie des intégrales définies. Cependant, il n'est pas inutile de présenter certains résultats qui me paraissent nouveaux.

CHAPITRE PREMIER.

Développements, en série, des fonctions $\cos^p\varphi \cos q\varphi$, $\cos^p\varphi \sin q\varphi$, etc.

---

1. Problème. — Sommer les séries :

$$P = \cos\alpha + \binom{p}{1}\cos(\alpha + 2\varphi) + \cdots + \binom{p}{k}\cos(\alpha + 2k\varphi) + \cdots$$

$$Q = \sin\alpha + \binom{p}{1}\sin(\alpha + 2\varphi) + \cdots + \binom{p}{k}\sin(\alpha + 2k\varphi) + \cdots$$

si p est plus grand que -1, ces deux séries sont convergentes. [Voir une *Note de M. Catalan, sur le développement de* $(1+x)^m$, insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 26 octobre 1857.]

On trouve facilement :

$$P = 2^p\cos^p\varphi\cos(p\varphi + \alpha),$$

$$Q = 2^p\cos^p\varphi\sin(p\varphi + \alpha).$$

En observant que $\cos q\varphi$ peut être écrit sous la forme $\cos(p + q - p)\varphi$, on a immédiatement les deux égalités :

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2^p\cos^p\varphi\cos q\varphi = \sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{p}{k}\cos(q - p + 2k)\varphi,$$

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2^p\cos^p\varphi\sin q\varphi = \sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{p}{k}\sin(q - p + 2k)\varphi \; *.$$

Ces équations subsistent pour toutes les valeurs de φ comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, inclusivement. Quand $\varphi = \frac{\pi}{2}$, les deux membres des égalités (1) et (2) deviennent infinis, si p est négatif.

Si nous multiplions (1) et (2) respectivement par $\sin q\frac{\pi}{2}$ et $\cos q\frac{\pi}{2}$ et que

* Nous ne considérons que la valeur réelle et positive de $(2\cos\varphi)^p$.

nous retranchions, il vient :

$$2^p \cos^p\varphi \sin q\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \sin q\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{p}{k}\cos(q-p+2k)\varphi - \cos q\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{p}{k}\sin(q-k+2k)\varphi.$$

Remplaçons φ par $\frac{\pi}{2}-\varphi$:

$$2^p \sin^p\varphi \sin q\varphi = \sin p\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)\binom{p}{k}\cos(q-p+2k)\varphi + \cos p\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\binom{p}{k}\sin(q-p+2k)\varphi.$$

On obtiendra, de la même manière, le développement de $\sin^p\varphi \cos q\varphi$. Nous aurons ainsi :

$$(a) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2^p\cos^p\varphi\cos q\varphi = \sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{p}{k}\cos(q-p+2k)\varphi,$$

$$(b) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2^p\cos^p\varphi\sin q\varphi = \sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{p}{k}\sin(q-p+2k)\varphi.$$

$$(c)\ 2^p\sin^p\varphi\cos q\varphi = \cos p\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\binom{p}{k}\cos(q-p+2k)\varphi - \sin p\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\binom{p}{k}\sin(q-p+2k)\varphi.$$

$$(d)\ 2^p\sin^p\varphi\sin q\varphi = \sin p\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\binom{p}{k}\cos(q-p+2k)\varphi + \cos p\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\binom{p}{k}\sin(q-p+2k)\varphi.$$

2. Ces développements, qui subsistent pour toutes les valeurs de φ comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ inclusivement, forment des cas particuliers des quatre développements plus généraux, parmi lesquels je citerai celui-ci :

$$2^{s_1+s_2+\cdots+s_m}\cos^{s_1}r_1x\cos^{s_2}r_2x\ldots\cos^{s_m}r_mx\cos qx = \cos\left[q-s_1r_1-s_2r_2\ldots s_mr_m\right]x$$
$$+\frac{1}{1.2.3\ldots n}\sum_{n=1}^{n=\infty}\binom{n}{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}s_1(s_1-1)\ldots(s_1-\alpha_1+1)\ldots s_m(s_m-1)\ldots$$
$$(s_m-\alpha_m+1)\cos\left[q-s_1r_1\ldots s_mr_m+2(\alpha_1r_1+\ldots+\alpha_mr_m)\right]x$$

pour toutes les valeurs entières et positives, y compris zéro, satisfaisant à l'égalité :

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m = n.$$

On le déduit du développement, suivant la série de Taylor, de la fonction

$$\frac{F(ix)+F(-ix)}{2} = e^{ixa}(a_1 + b_1 e^{2r_1 ix})^{s_1} + \cdots + (a_m + b_m e^{2r_m ix})^{s_m}$$
$$+ e^{-iax}(a_1 + b_1 e^{-2r_1 ix})^{s_1} + \cdots + (a_m + b_m e^{-2r_m ix})^{s_m},$$

où l'on suppose :

$$a_1 + a_2 = \cdots = a_m = b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 1.$$

CHAPITRE II.

Calcul des intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \cos q\varphi d\varphi$, etc.

---

3. Soient

$$A_{p,q} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos qx dx,$$

$$B_{p,q} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \sin qx dx.$$

En vertu des formules (a), (b) nous aurons, par intégration :

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad A_{p,q} = \frac{\sin(q-p)\frac{\pi}{2}}{2^p} \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \frac{1}{q-p+2k},$$

$$(4) \quad B_{p,q} = -\frac{\cos(q-p)\frac{\pi}{2}}{2^p} \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \frac{1}{q-p+2k} + \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{p}{k} \frac{1}{q-p+2k}.$$

Si nous supposons $q-p>0$, rien n'est plus facile que d'exprimer, par

des intégrales définies, les sommes de ces séries convergentes. Posons :

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{p}{k}\frac{x^{q-p+2k}}{q-p+2k},$$

d'où

$$\frac{dS}{dx}=x^{q-p+1}(1-x^2)^p.$$

Nous aurons donc,

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\binom{p}{k}\frac{1}{q-p+2k}=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p dx,$$

et semblablement,

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{p}{k}\frac{1}{q-p+2k}=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p dx.$$

Ainsi :

$$(5)\quad \ldots\ldots\quad A_{p,q}=\frac{\sin(q-p)\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}}B\left(\frac{q-p}{2},p+1\right),$$

$$(6)\quad B_{p,q}=-\frac{\cos(q-p)\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}}B\left(\frac{q-p}{2},p+1\right)+\frac{1}{2^{p+1}}\int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p dx.$$

M. Bierens de Haan donne la formule (5), dans le huitième tome des *Mémoires de l'Académie des sciences d'Amsterdam*. [3e partie, méthode 17, nos 18-20.] Le procédé de détermination est fondé sur le développement d'une fonction, suivant la série de Taylor. Kummer [tome XX du *Journal de Crelle*] emploie également cette méthode pour arriver au même résultat. Au fond, le procédé que nous avons suivi ne diffère pas de celui de ces deux géomètres.

4. Pour développer en série l'intégrale $\int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p dx$, nous ferons

d'abord la transformation, $x = 1 - z$, qui nous donnera :

$$D = \int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p dx = 2^p \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \int_0^1 (1-z)^{\frac{q-p}{2}-1} z^k \frac{dz}{2^k},$$

$$D = 2^p \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \binom{p}{k} \frac{\Gamma\left(\frac{q-p}{2}\right)\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(\frac{q-p}{2}+k+1\right)} \cdot \frac{1}{2^k} = 2^{p+1} \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{(q-p+2k)\dots(q-p)}.$$

Les termes de cette série convergente sont d'abord alternativement positifs et négatifs; mais, à partir d'un certain rang, ils deviennent tous positifs ou tous négatifs.

Nous aurons en conséquence les deux formules :

$$(7) \quad \dots\dots\dots \quad A_{p,q} = \frac{\sin (q-p)\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} B\left(\frac{q-p}{2}, p+1\right),$$

$$(8) \quad B_{p,q} = -\frac{\cos (q-p)\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} B\left(\frac{q-p}{2}, p+1\right) + \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{(q-p+2k)\dots(q-p)} \;{}^*.$$

5. Remarque I. — Ces formules (7) et (8) subsistent pour les valeurs de p satisfaisant aux conditions :

$$q - p > 0, \quad p > -1.$$

Généralement, les fonctions $\cos^p\varphi \cos q\varphi$, $\cos^p\varphi \sin q\varphi$ deviennent infinies quand $\varphi = \frac{\pi}{2}$, si p est négatif; mais les valeurs des intégrales $A_{p,q}$, $B_{p,q}$ n'en

* Pour le calcul numérique de l'intégrale $B_{p,q}$, il est préférable de recourir à la formule :

$$B_{p,q} = -\frac{\cos (q-p)\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} B\left(\frac{q-p}{2}, p+1\right) + \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{p}{k} \frac{1}{q-p+2k},$$

$\sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{p}{k} \frac{1}{q-p+2k}$ étant une série à termes alternativement positifs et négatifs.

restent pas moins finies. Effectivement, considérons l'équation

$$2^p \int_0^\varphi \cos^p\varphi \cos q\varphi d\varphi = \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{p}{k} \int_0^\varphi \cos(q-p+2k)\varphi d\varphi.$$

Les deux membres de cette égalité sont des fonctions de φ, constamment égales entre elles pour les valeurs de φ comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$; ε désignant, suivant l'usage, une quantité positive et infiniment petite. A la limite, ces fonctions, finies ou infinies, seront encore égales.

En second lieu, pour $0 > p > -1$, nous avons la relation

$$\frac{\cos q\varphi}{2^{p'}\cos^{p'}\varphi} = \cos(q+p')\varphi - \frac{p'}{1}\cos(q+p'+2)\varphi + \frac{p'(p'+1)}{1.2}\cos(q+p'+4)\varphi .., \qquad (\alpha)$$

où l'on suppose

$$1 > p' > 0.$$

Si q est un nombre impair, $\frac{\cos q\varphi}{2^{p'}\cos^{p'}\varphi}$ s'annule pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, tandis que le second membre de l'égalité (α) devient infiniment grand.

Mais nous aurons toujours

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\cos q\varphi}{2^{p'}\cos^{p'}\varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \left[\cos(q+p')\varphi - \frac{p'}{1}\cos(q+p'+2)\varphi + \frac{p'(p'+1)}{1.2}\cos(q+p'+4)\varphi - \cdots\right] d\varphi$$

$$= \frac{\sin(q+p')\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}{(q+p')} - \frac{p'}{1}\frac{\sin(q+p'+2)\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}{q+q'+2} + \frac{p'(p'+1)}{1.2}\frac{\sin(q+p'+4)\left(\frac{\pi}{2}-4\right)}{q+p'+4} - \cdots,$$

$$\lim \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{\cos q\varphi}{2^{p'}\cos^{p'}\varphi} d\varphi = \sin(q+p')\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{q+p'} + \frac{p'}{1}\frac{1}{q+p'+2} + \frac{p'(p'+1)}{1.2}\frac{1}{q+p'+4} + \cdot\cdot\right].$$

Or, la quantité entre crochets est égale à

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{q+p'}{2}-1}(1-x)^{-p'}dx.$$

Donc, finalement

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p \cos q\varphi d\varphi = \frac{\sin(q-p)\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} B\left(\frac{q-p}{2}, p+1\right),$$

q et p satisfaisant aux inégalités :

$$q-p > 0, \quad p > -1.$$

6. Remarque II. — Dans les formules (7) et (8), il est permis de supposer q égal à zéro, pourvu que p reste compris entre 0 et -1. Par le changement de p en $-p$, p étant maintenant une quantité essentiellement positive, < 1, les équations (7) et (8) deviennent

$$1 > p > 0, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-p}\varphi d\varphi = \frac{\sin p\frac{\pi}{2}}{2^{1-p}} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma(1-p)}{\Gamma\left(1-\frac{p}{2}\right)}, \quad \ldots\ldots (\beta)$$

$$\int_0^1 x^{\frac{p}{2}-1}(1+x)^{-p}dx = \cos p\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma(1-p)}{\Gamma\left(1-\frac{p}{2}\right)}. \quad \ldots\ldots (\gamma)$$

Pour vérifier la formule (γ), posons

$$x = \operatorname{tg}^2\varphi.$$

On trouve la suite d'égalités :

$$\int_0^1 x^{\frac{p}{2}-1}(1+x)^{-p}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{p-1}\varphi \sin^{p-1}\varphi d\varphi$$

$$= \frac{1}{2^{p-2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^{p-1}2\varphi d\varphi = \frac{1}{2^{p-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}\varphi d\varphi.$$

Faisons $\sin\varphi = \sqrt{x}$, il vient

$$\int_0^1 x^{\frac{p}{2}-1}(1+x)^{-p}dx = \frac{1}{2^p}\int_0^1 x^{\frac{p}{2}-1}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx.$$



On a donc, identiquement,

$$\frac{1}{2^p}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)}=\cos p\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma(1-p)}{\Gamma\left(1-\frac{p}{2}\right)}=\sin(1-p)\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma(1-p)}{\Gamma\left(1-\frac{p}{2}\right)},$$

$$\frac{1}{2^p}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)}=\pi\frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma\left(1-\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)},$$

$$\frac{1}{2^p}\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1-p}{2}\right)=\sqrt{\pi}.\Gamma(1-p).$$

Ce qui est exact, en vertu de la formule de Legendre :

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p).$$

7. Pour déterminer les valeurs des intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p\varphi\cos q\varphi d\varphi,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p\varphi\sin q\varphi d\varphi,$$

il suffit d'observer qu'on a identiquement

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p\varphi\cos q\varphi d\varphi&=\cos q\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^p\varphi\cos q\varphi d\varphi+\sin q\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^p\varphi\sin q\varphi d\varphi,\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p\varphi\sin q\varphi d\varphi&=\sin q\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^p\varphi\cos q\varphi d\varphi-\sin q\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^p\varphi\sin q\varphi d\varphi.\end{aligned}\right.$$

On voit donc que ces quatre intégrales sont généralement exprimables, au moyen d'intégrales eulériennes, et de la série convergente

$$T=\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{(q-p+2k)\ldots(q-p)},$$

cas particulier de la série de Gauss *.

* Voir : *Sur quelques intégrales définies*, par M. Catalan, octobre 1885.

8. Si $q - p$ est *impair*,

(9bis) . . . . $A_{p,q} = 0$

En particulier, si $q = p$, le développement des $\cos^p x \cos px$ donne immédiatement

(9ter) . . . . $p > -1$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos px dx = \frac{\pi}{2^{p+1}}$,

intégrale due à Poisson.

9. Pour ramener la transcendante $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \sin px dx$ à une transcendante algébrique, il faut encore remonter au développement de $\cos^p x \sin qx$.

$$B_{p,p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \sin px dx = -\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{p}{k}\frac{\cos k\pi}{2k} + \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{p}{k}\frac{1}{2k}.$$

$$= \frac{1}{2^p}\left[\binom{p}{1} + \frac{1}{3}\binom{p}{3} + \cdots + \frac{1}{2k-1}\binom{p}{2k-1} + \cdots\right] = \frac{S}{2^p}.$$

En posant

$$S = \binom{p}{1} + \frac{1}{3}\binom{p}{3} + \cdots + \frac{1}{2k-1}\binom{p}{2k-1} + \cdots$$

Considérons les deux développements :

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \cdots$$

$$(1-x)^p = 1 - \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 - \cdots$$

On en conclut

$$S = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1+x)^p - (1-x)^p}{x} dx;$$

et par conséquent,

(10) . . . . $B_{p,p} = \frac{1}{2^{p+1}}\int_0^1 \frac{(1+x)^p - (1-x)^p}{x} dx.$

10. Remarque. — A. Serret, dans le tome VIII du *Journal de Liouville,* donne la formule suivante :

$$(11) \quad . \quad . \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \sin px dx = \frac{1}{2^{p+1}} \left[2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdot \cdot \cdot + \frac{2^p}{p} \right]. \quad (p \text{ entier}).$$

En comparant (10) et (11), on obtient l'identité, à peu près évidente :

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^p - (1-x)^p}{x} dx = 2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdot\cdot + \frac{2^p}{p} \cdot \quad (p \text{ entier}).$$

On peut l'écrire ainsi :

$$C_{p,1} + \frac{1}{3} C_{p,3} + \frac{1}{5} C_{p,5} + \cdots = 1 + \frac{2}{2} + \frac{4}{3} + \frac{8}{4} + \cdots + \frac{2^{p-1}}{p}.$$

Par exemple :

$$6 + \frac{1}{3} 20 + \frac{1}{5} 6 = 1 + \frac{2}{2} + \frac{4}{3} + \frac{8}{4} + \frac{16}{5} + \frac{32}{6}.$$

11. $q = p + 2$ donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \sin (p+2) x dx = \frac{1}{p+1}.$$

Généralement, si $q - p$ est pair, $B_{p,q}$ sera exprimable sous forme finie, attendu que les intégrales contenues dans le second membre de l'équation (6) sont connues.

Transformons cette équation : elle devient, pour $q - p = 2k$,

$$(10^{\text{bis}}) \quad . \quad . \quad B_{p,p+2k} = (-1)^{k+1} \frac{1}{2^{p+1}} \int_0^1 x^{k-1} (1-x)^p dx + \frac{1}{2^{p+1}} \int_0^1 x^{k-1} (1+x)^p dx;$$

dans la seconde intégrale, changeons x en $-x$:

$$B_{p,p+2k} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{p+1}} \int_{-1}^{+1} x^{k-1} (1-x)^p dx = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{p+1}} \int_0^2 (1-x)^{k-1} x^p dx.$$

A. Serret trouve la formule [*Journal de Liouville,* tome VIII]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \sin(p+2k)x dx$$

$$=(p+2k)\left[\frac{1}{(p+1)(p+2)}-2^2\cdot\frac{(p+k+1)(k-1)}{(p+1)\dots(p+4)}+\dots\pm 2^{2k-2}\frac{(p+k+1)\cdots p+2k-1)(k-1)\dots 3.2.1}{(p+1)(p+2)\dots(p+2k)}\right];$$

d'où, si k est un nombre entier, résulte l'identité :

$$\frac{(-1)^{k+1}\int_0^1 (1-x)^{k-1}x^p dx}{2^{p+1}}$$

$$=(p+2k)\left[\frac{1}{(p+1)(p+2)}-2^2\cdot\frac{(p+k+1)(k-1)}{(p+1)\dots(p+4)}+\dots\pm 2^{2k-2}\cdot\frac{(p+k+1)\dots(p+2k-1)(k-1)\dots 3.2.1}{(p+1)(p+2)\dots(p+2k)}\right].$$

12. Toutes les formules précédentes ne sont vraies que pour $q-p>0$; il s'agit maintenant de reconnaître ce qu'elles deviennent dans le cas de

$$q-p<0.$$

A cette fin, nous emploierons la formule de réduction suivante :

$$A_{p,q}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi\cos q\varphi d\varphi=(p-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p-2}\varphi\cos q\varphi d\varphi.\sin^2\varphi+q\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p-1}\varphi\sin\varphi\sin q\varphi d\varphi.$$

$$pA_{p,q}=(p-1)A_{p-2,q}+q\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p-1}\varphi\sin\varphi\sin q\varphi d\varphi.$$

Or,

$$p\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p-1}\varphi\sin\varphi\sin q\varphi d\varphi=q\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^p\varphi\cos q\varphi d\varphi;$$

C'est-à-dire :

$$A_{p,q}=\frac{p(p-1)}{p^2-q^2}A_{p-2,q},$$

$$(12)\quad .\ .\quad A_{p,q}=\frac{p(p-1)\dots(p-2k+1)}{(p^2-q^2)[(p-2)^2-q^2]\dots[(p-2k+2)^2-q^2]}A_{p-2k,q},$$

$2k$ étant le plus grand nombre entier contenu dans p, ou $2k = E(p)$, suivant la notation de Legendre. Si $p - 2k$ est encore plus grand que q, on devra procéder de la façon suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \cos q\varphi d\varphi = A_{p+1,q+1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \sin\varphi \sin(q+1)\varphi . d\varphi,$$

$$(p+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \sin\varphi \sin(q+1)\varphi d\varphi = (q+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \cos(q+1)\varphi d\varphi;$$

d'où

$$(13) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A_{p,q} = \frac{p+q+2}{p+1} A_{p+1,q+1}.$$

Maintenant, au moyen de la formule de réduction précédente, on peut ramener le nombre $p+1$ à une quantité comprise entre -1 et $+1$.

13. On trouve, aussi facilement, la formule de réduction

$$(14) \quad \ldots\ldots \quad B_{p,q} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \sin q\varphi d\varphi = \frac{p(p-1}{p^2-q^2} B_{p-2,q} - \frac{q}{p^2-q^2},$$

Et cette autre

$$(15) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad B_{p,q} = \frac{p+q+2}{p+1} B_{p+1,q+1}.$$

14. Reprenons la formule

$$A_{p,q} = \frac{p(p-1)\ldots(p-2k+1)}{(p^2-q^2)\ldots[(p-2k+2)^2-q^2]} A_{p-2k,q}.$$

D'autre part, nous avons la formule bien connue

$$(16) \quad \ldots\ldots \quad A_{.,q} = \frac{\pi}{(p+1)2^{p+1} B\left(\frac{p+q}{2}+1, \frac{p-q}{2}+1\right)}.$$

Comparant les égalités (12) et (16), nous obtenons la relation

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{B\left(\frac{p-q}{2}+1, \frac{p+q}{2}+1\right)} \\ &=(-1)^k \frac{(p+1)2^{2k}\sin(q-p)\frac{\pi}{2}}{\pi} \cdot \frac{p(p-1)\ldots(p-2k+1)}{(p^2-q^2)\ldots[(p-2k+2)^2-q^2]} B\left(\frac{q-p}{2}+k, p-2k+1\right), \end{aligned}\right.$$

k satisfaisant aux conditions :

$$p-2k < q, \quad p-2k > -1.$$

p et q étant donnés, s'il est impossible de satisfaire à ces inégalités, il faudra faire subir, à cette formule, la modification indiquée plus haut. Si p est un nombre pair, nous obtenons, sous forme d'*un produit limité,* la valeur de l'inverse de l'intégrale eulérienne de première espèce; chose, qui ne doit pas nous surprendre, attendu que la différentielle binôme

$$x^{\frac{q+p}{2}}(1-x)^{\frac{p-q}{2}}dx$$

est intégrable.

15. Remarque I. — Quand p et q vérifient les conditions

$$q-p>0, \quad 1>\frac{q-p}{2},$$

on a directement

$$A_{p,q}=\frac{\sin(q-p)\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} B\left(\frac{q-p}{2}, p+1\right),$$

$$A_{p,q}=\frac{\pi}{(p+1)2^{p+1}} \frac{1}{B\left(\frac{p-q}{2}+1, \frac{p+q}{2}+1\right)}.$$

Posons

$$q-p=2m, \quad q+p=2n.$$



en comparant ces deux équations, on a

$$B(m, n-m+1)\,B(1-m, m+1) = \frac{\pi}{(n-m+1)\sin m\pi};$$

et, si l'on fait $n = m$, on obtient la formule d'Euler

$$\Gamma(m)\,\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\sin m\pi}.$$

Remarque II. — Il est clair que, connaissant le développement de $A_{p,q}$ en série convergente, on pourra, en vertu de la relation (16), développer $\frac{1}{B(\alpha,\beta)}$ en série convergente.

En effet,

$$\frac{\pi}{(p+1)\,2^{p+1}B\left(\frac{p-q}{2}+1, \frac{p+q}{2}+1\right)} = \frac{\sin(q-p)\frac{\pi}{2}}{2^p}\sum_{m=0}^{m=\infty}(-1)^m\binom{p}{m}\frac{1}{q-p+2m};$$

posons

$$p - q + 2 = 2\alpha,$$
$$p + q + 2 = 2\beta;$$

d'où

$$(18)\quad \frac{1}{B(\alpha,\beta)} = \frac{(\alpha+\beta-1)\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha+\beta-2}{1}\,\frac{1}{2-\alpha} + \frac{(\alpha+\beta-2)(\alpha+\beta-3)}{1.2}\,\frac{1}{3-\alpha} - \cdots\right].$$

Par exemple, si $\beta = 1$,

$$(19)\quad \frac{\pi}{\sin\alpha\pi} = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha-1}{1}\,\frac{1}{2-\alpha} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2}\,\frac{1}{3-\alpha} - \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{1.2.3}\,\frac{1}{4-\alpha} + \cdots$$

On peut donner au développement de $\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$ une infinité de formes différentes.

Ainsi pour $\beta = 2$,

$$(20)\quad \frac{\pi\alpha}{\sin\alpha\pi} = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1}\,\frac{1}{2-\alpha} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\,\frac{1}{3-\alpha} - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3}\,\frac{1}{4-\alpha} + \cdots$$

L'équation (19), pour $\alpha = \frac{1}{2}$, donne le développement de π, bien connu,

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \cdots$$

CHAPITRE III.

Calcul des intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \cos q\varphi d\varphi$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \sin q\varphi d\varphi$.

---

16. Nous allons considérer maintenant deux intégrales un peu plus générales :

$$A_{r,s,q} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \cos q\varphi d\varphi, \qquad B_{r,s,q} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \sin q\varphi d\varphi.$$

Il est permis de supposer $q - s - r > 0$, parce qu'il est *toujours* possible de ramener tous les cas à celui-ci. Effectivement, on pourra réduire les exposants s et r entre les limites -1 et $+1$, sans que cette opération altère la valeur de q.

Nous supposons ainsi $s > -1$, $r > -1$.

Au moyen de l'intégration par parties, on a

$$A_{r,s,q} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos\varphi \cos^{s-1}\varphi \cos q\varphi d\varphi = -\frac{1}{r+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r+1}\varphi d\left[\cos^{s-1}\varphi \cos q\varphi\right],$$

$$A_{r,s,q} = \frac{s-1}{r+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r+2}\varphi \cos^{s-2}\varphi \cos q\varphi d\varphi + \frac{q}{r+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r+1}\varphi \cos^{s-1}\varphi \sin q\varphi d\varphi;$$

c'est-à-dire

(21) . . . . $(s+r)\,A_{r,s,q} = (s-1)\,A_{r,s-2,q} + q\,.\,B_{r+1,s-1,q}$;

et semblablement,

(22) . . . . $(s+r)\,B_{r,s,q} = (s-1)\,B_{r,s-2,q} - q\,A_{r+1,s-1,q}$.

D'abord, on peut réduire un seul exposant, celui de $\cos\varphi$, par exemple,

celui de $\sin\varphi$ ne variant pas ou n'étant augmenté que d'une unité. Les formules (1) et (2) donnent respectivement :

$$(23) \quad \ldots\ldots \quad A_{r,s,q} = \frac{s-1}{s+r} A_{r,s-2,q} + \frac{q}{s+r} B_{r+1,s-1,q},$$

$$B_{r+1,s-1,q} = \frac{s-2}{s+r} B_{r+1,s-3,q} - \frac{q}{s+r} A_{r+2,s-2,q},$$

$$(24) \quad \ldots \quad B_{r+1,s-1,q} = \frac{s-2}{s+r} B_{r+1,s-3,q} - \frac{q}{s+r} A_{r,s-2,q} + \frac{q}{s+r} A_{r,s,q};$$

d'où, par substitution de cette valeur dans l'équation (23),

$$(25) \quad \ldots \quad A_{r,s,q} = \frac{(s-1)(s+r)-q^2}{(s+r)^2-q^2} A_{r,s-2,q} + \frac{q(s-2)}{(s+r)^2-q^2} B_{r+1,s-3,q}.$$

On obtient, de la même manière,

$$(26) \quad \ldots \quad B_{r,s,q} = \frac{(s-1)(s+r)-q^2}{(s+r)^2-q^2} B_{r,s-2,q} - \frac{q(s-2)}{(s+r)^2-q^2} A_{r+1,s-3,q}.$$

L'application judicieuse des formules (21), (22), (25) et (26) et des identités

$$A_{r+2,\alpha,q} \equiv A_{r,\alpha,q} - A_{r,\alpha+2,q},$$

$$B_{r+2,\alpha,q} \equiv B_{r,\alpha,q} - B_{r,\alpha+2,q},$$

permettra, dans chaque cas particulier, de ramener l'exposant s entre les limites -1 et $+1$.

En outre, si $r+1$ est une quantité comprise entre 1 et 2, on pourra, en vertu des identités précédentes, diminuer de deux unités l'exposant de $\sin\varphi$ dans les intégrales $A_{r+1,\alpha,q}$, $B_{r+1,\alpha,q}$. Les exposants de $\sin\varphi$ et de $\cos\varphi$ seront ainsi ramenés entre les limites -1 et $+1$.

17. Application. — Soit s compris entre 4 et 5.

Par application de la formule (25),

$A_{r,s,q}$ se décompose en $A_{r,s-2,q}$, $B_{r+1,s-3,q}$,

$A_{r,s-2,q}$ se décompose en $A_{r,s-4,q}$, $B_{r+1,s-5,q}$.

Par application de la formule (2),

$$B_{r+1,s-3,q} \text{ se décompose en } B_{r+1,s-4,q} \text{ et } A_{r+2,s-4,q},$$

$$A_{r+2,s-4,q} = A_{r,s-4,q} - A_{r,s-2,q}.$$

Finalement,

$$A_{r,s,q} \text{ se décompose en } A_{r,s-4,q} \text{ et } B_{r+1,s-3,q}.$$

Si $r+1$ est compris entre 1 et 2, il vient

$$B_{r+1,s-3,q} = B_{r-1,s-3,q} - B_{r-1,s-3,q}.$$

Par application de la formule (2),

$$B_{r-1,s-3,q} \text{ se décompose en } B_{r-1,s-3,q} \text{ et } A_{r,s-4,q}.$$

18. S'il faut réduire les deux exposants s et r, on peut, d'après ce qui précède, les ramener successivement entre les limites -1 et $+1$. Mais il est préférable d'opérer simultanément la réduction des deux exposants s et r.

Reprenons l'équation (21) :

$$(s+r)A_{r,s,q} = (s-1)A_{r,s-2,q} + q.B_{r+1,s-1,q},$$

$$(27) \quad \ldots \quad (s+r)A_{r,s,q} = (s-1)A_{r,s-2,q} + q\,B_{r-1,s-1,q} - q\,B_{r-1,s+1,q},$$

$$(s+r)B_{r-1,s+1,q} = s\,B_{r-1,s-1,q} - q\,A_{r,s,q}.$$

Substituons cette valeur dans l'équation (7); on a

$$(s+r)A_{r,s,q} = (s-1)A_{r,s-2,q} + q.B_{r-1,s-1,q} - \frac{qs}{s+r}B_{r-1,s-1,q} + \frac{q^2}{s+r}A_{r,s,q},$$

c'est-à-dire

$$(28) \quad \ldots \quad A_{r,s,q} = \frac{(s-1)(s+r)}{(s+r)^2 - q^2}A_{r,s-2,q} + \frac{q.r}{(s+r)^2 - q^2}B_{r-1,s-1,q}.$$

$r = 0$ donne la formule de réduction trouvée précédemment.

Notre but n'est pas encore atteint; il faut réduire l'exposant de r dans $A_{r,s-2,q}$.



Par le changement de s en $s-2$, l'équation (21) donne

$$(s+r-2)\,A_{r,s-2,q} = (r-1)\,A_{r-2,s-2,q} - q\,B_{r-1,s-1,q},$$

$$A_{r,s-2,q} = \frac{r-1}{s+r-2}A_{r-2,s-2,q} - \frac{q}{s+r-2}B_{r-1,s-1,q}.$$

En reportant cette valeur dans l'équation (28), on obtient

$$(29)\quad A_{r,s,q} = \frac{(s-1)(r-1)(s+r)}{(s+r-2)[(s+r)^2-q^2]}A_{r-2,s-2,q} + q\,\frac{(r-s)(r+s-1)}{[(s+r)^2-q^2](s+r-2)}B_{r-1,s-1,q};$$

et semblablement,

$$(30)\quad B_{r,s,q} = \frac{(s-1)(r-1)(s+r)}{(s+r-2)[(s+r)^2-q^2]}B_{r-2,s-2,q} - q\,\frac{(r-s)(r+s-1)}{[(r-s)^2-q^2](s+r-2)}A_{r-1,s-1,q}.$$

Il pourrait arriver que les valeurs de s et de r fussent telles que les formules (29) et (30) devinssent inapplicables. Il en serait ainsi si, par l'application répétée de ces formules, l'exposant r était ramené entre -1 et $+1$, s étant toujours supérieur à l'unité; mais alors l'application des formules (21), (22), (25), (26), permettra de ramener l'exposant s entre les mêmes limites.

Maintenant si, après la réduction poussée aussi loin que possible, q est encore plus petit que la somme des exposants s et r ainsi réduits, il suffira d'employer l'artifice qui consiste : 1° à augmenter la valeur de q; 2° à réduire les exposants s et r sans altérer la nouvelle valeur de q.

19. Remarque. — Ces formules de réduction deviennent illusoires, si les exposants s et r et le paramètre q satisfont à l'une des équations

$$(31)\quad \ldots\ldots\ldots\quad s+r-2=0,\quad s+r-4=0\ldots,$$

$$(32)\quad \ldots\ldots\quad s+r=q,\quad s+r-2=q,\quad s+r-4=q\ldots$$

Si les valeurs de s et de r vérifient l'une des équations de la suite (31), on procédera de la manière suivante :

on a, identiquement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \cos q\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^{s+1}\varphi \cos(q+1)\varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi^{r+1} \cos^s\varphi \sin(q+1)\varphi d\varphi,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \sin q\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^{s+1}\varphi \sin(q+1)\varphi d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r+1}\varphi \cos^s\varphi \cos(q+1)\varphi d\varphi;$$

maintenant les formules de réduction permettront de ramener, entre les limites -1 et $+1$, les exposants de $\sin\varphi$ et de $\cos\varphi$ dans ces intégrales auxiliaires.

Pour résoudre le second cas, nous observons que, dans la série des équations de réduction, nous obtiendrons certainement les intégrales $A_{\alpha,\beta,q}$ et $B_{\alpha,\beta,q}$, où les indices α, β satisfont à l'équation

$$\alpha + \beta = s + r - 2k = q.$$

Dès lors, il sera impossible d'aller plus loin dans la voie des réductions.

Mais la détermination des intégrales $A_{r,s,q}$ et $B_{r,s,q}$ n'en serait pas moins chose faite, si l'on pouvait calculer directement les intégrales $A_{\alpha,\beta,q}$, $B_{\alpha,\beta,q}$, α et β satisfaisant à la condition

$$\alpha + \beta = q.$$

Nous examinerons bientôt ce cas-limite; et nous verrons qu'on peut exprimer les transcendantes trigonométriques $A_{\alpha,\beta,q}$, $B_{\alpha,\beta,q}$ au moyen d'une quantité finie et d'une transcendante de la forme

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^\alpha(1-x)^\beta - (1-x)^\alpha(1+x)^\beta}{x} dx.$$

20. Cela posé, on a *immédiatement*,

$$(32) \quad \ldots\ldots \quad A_{r,s,q} = \frac{1}{2^s}\sum_{k=1}^{k=\infty}\binom{s}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos(q-s+2k)\varphi d\varphi,$$

$$(33) \quad \ldots\ldots \quad B_{r,s,q} = \frac{1}{2^s}\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{s}{k}\int^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \sin(q-s+2k)\varphi d\varphi.$$

Mais on a les deux identités :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos nx dx = \cos n\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos nx dx + \sin n\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin nx dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \sin nx dx = \sin n\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos nx dx - \cos n\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin nx dx\,;$$

nous en déduisons :

$$(34)\quad \left\{ \begin{aligned} A_{r,s,q} &= \frac{1}{2^s}\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{s}{k}\cos(q-s+2k)\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^r\varphi\cos(q-s+2k)\varphi d\varphi \\ &+ \frac{1}{2^s}\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{s}{k}\sin(q-s+2k)\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^r\varphi\sin(q-s+2k)\varphi d\varphi, \end{aligned}\right.$$

$$(35)\quad \left\{ \begin{aligned} B_{r,s,q} &= \frac{1}{2^s}\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{s}{k}\sin(q-s+2k)\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^r\varphi\cos(q-s+2k)\varphi d\varphi \\ &- \frac{1}{2^s}\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{s}{k}\cos(q-s+2k)\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^r\varphi\sin(q-s+2k)\varphi d\varphi. \end{aligned}\right.$$

Or,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^r\varphi\cos(q-s+2k)\varphi d\varphi = \frac{\sin(q-s-r+2k)\frac{\pi}{2}}{2^{r+1}}\,B\left(\frac{q-s-r}{2}+k,\ r+1\right),$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^r\varphi\sin(q-s+2k)\varphi d\varphi = &-\frac{\cos(q-s-r+2k)\frac{\pi}{2}}{2^{r+1}}\,B\left(\frac{q-s-r}{2}+k,\ r+1\right) \\ &+\frac{1}{2^{r+1}}\int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}+k-1}(1+x)^r dx\,;\end{aligned}$$

substituons ces valeurs dans les équations (34) et (35), nous obtenons

finalement les deux formules générales :

$$(36) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} A_{r,s,q} &= -\frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+1}}\int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1-x)^r(1+x)^s dx \\ &+ \frac{\sin(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+1}}\int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1+x)^r(1-x)^s dx, \end{aligned} \right.$$

$$(37) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} B_{r,s,q} &= \frac{\cos r\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+1}}\int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1-x)^r(1+x)^s dx \\ &- \frac{\cos(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+1}}\int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1+x)^r(1-x)^s dx, \end{aligned} \right.$$

vraies pour toutes les valeurs de s, r et q, satisfaisant aux conditions

$$q-s-r > 0, \quad r > -1, \quad s > -1.$$

Généralement, les transcendantes contenues dans les seconds membres des équations (36) et (37) ne sont pas réductibles aux intégrales eulériennes. La forme que nous leur avons donnée va nous permettre de les développer en séries convergentes.

Examinons les transcendantes

$$M_1 = \int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1-x)^r(1+x)^s dx,$$

$$M_2 = \int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1+x)^r(1-x)^s dx.$$

Développons $(1+x)^s$ et $(1+x)^r$ par la formule du binôme, et faisons usage de la propriété $\Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1)$, nous trouvons sans

aucune difficulté

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} M_1 &= \frac{\Gamma\left(\frac{q-s-r}{2}\right)\Gamma(r+1)}{\Gamma\left(\frac{q-s+r}{2}+1\right)}\left[1+\sum_{k=1}^{k=\infty}\binom{s}{k}\frac{(q-s-r+2k-2)\dots(q-s-r)}{(q-s+r+2k)\dots(q-s+r+2)}\right],\\ M_2 &= \frac{\Gamma\left(\frac{q-s-r}{2}\right)\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(\frac{q-r+s}{2}+1\right)}\left[1+\sum_{k=1}^{k=\infty}\binom{r}{k}\frac{(q-s-r+2k-2)\dots(q-s-r)}{(q-r+s+2k)\dots(q-r+s+2)}\right].\end{aligned}\right.$$

Il est permis de développer $(1+x)^r$ et $(1+x)^s$, par la formule du binôme, attendu que la variable x est constamment comprise entre 0 et 1 inclusivement. [Voir la Note de M. Catalan, citée plus haut.]

Les séries (38) sont convergentes; chacun des facteurs $\frac{q-s-r+2k-2}{q-s+r+2k}$ etc., est plus petit que l'unité et tend vers cette valeur, si k augmente indéfiniment. En outre, on voit que les termes de ces deux séries deviendront, à partir d'un certain rang, alternativement positifs et négatifs.

Si q est très grand, r et s très petits, M_1 et M_2 tendent respectivement vers les valeurs

$$\frac{2^s\Gamma\left(\frac{q-s-r}{2}\right)\Gamma(r+1)}{\Gamma\left(\frac{q-s+r}{2}+1\right)},\quad \frac{2^r\Gamma\left(\frac{q-s-r}{2}\right)\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(\frac{q-r-s}{2}+1\right)}.$$

Nous aurons ainsi

$$(39)\quad \dots\dots\dots\quad A_{r,s,q} = -\frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}}M_1 + \frac{\sin(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}}M_2,$$

$$(40)\quad \dots\dots\dots\quad B_{r,s,q} = \frac{\cos r\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+q}}M_1 - \frac{\cos(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}}M_2.$$

21. — *Examen du cas limite.* Soient donc

$$(41)\quad \dots\dots\dots\quad A_{r,s,s+r} = \frac{1}{2^s}\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{s}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^r\varphi\cos(r+2k)\varphi\,d\varphi,$$

$$(42)\quad \dots\dots\dots\quad B_{r,s,s+r} = \frac{1}{2^s}\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{s}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^r\varphi\sin(r+2k)\varphi\,d\varphi.$$

ou

$$A_{r,s,s+r} = \frac{1}{2^s}\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{s}{k}\cos(r+2k)\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^r\varphi\cos(r+2k)\varphi d\varphi$$

$$+\frac{1}{2^s}\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{s}{k}\sin(r+2k)\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^r\varphi\sin(r+2k)\varphi d\varphi,$$

$$B_{r,s,s+r} = \frac{1}{2^s}\sum_{k=0}^{k=8}\binom{s}{k}\sin(r+2k)\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^r\varphi\cos(r+2k)\varphi d\varphi$$

$$-\frac{1}{2^s}\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{s}{k}\cos(r+2k)\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^r\varphi\sin(r+2k)\varphi d\varphi.$$

Mais, nous avons donné, n°s 8 et 11, les formules suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^r\varphi\cos r\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{r+1}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^r\varphi\cos(r+2k)\varphi d\varphi = 0, \quad k = 1, 2, 3\ldots$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^r\varphi\sin(r+2k)\varphi d\varphi = \frac{1}{2^{r+1}}\int_0^1 x^{k-1}(1+x)^r dx - (-1)^k\frac{1}{2^{r+1}}\int_0^1 x^{k+1}(1-x)^r dx,$$

en conséquence,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^r\varphi\cos^s\varphi\cos(s+r)\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{s+r+1}}\cos r\frac{\pi}{2}$$

$$+\frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}}\left[\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^k\binom{s}{k}\int_0^1 x^{k-1}(1+x)^r dx - \sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{s}{k}\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^r dx\right],$$

C'est-à-dire

(43) . . . . . $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^r\varphi\cos^s\varphi\cos(s+r)\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{s+r+1}}\cos r\frac{\pi}{2}$$

$$+\frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}}\int_0^1\frac{(1+x)^r(1-x)^s-(1-x)^r(1+x)^s}{x}dx,$$

(44) . . . . . $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^r\varphi\cos^s\varphi\sin(s+r)\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{s+r+1}}\sin r\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\cos r\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}}\int_0^1\frac{(1+x)^r(1-x)^s-(1-x)^r(1+x)^s}{x}dx.$$

22. Pour développer, en série convergente, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^r(1-x)^s-(1-x)^r(1+x)^s}{x}\,dx,$$

nous procéderons de la manière suivante.

Soit, pour fixer les idées, r plus grand que s.

$$b(s,r)=\int_0^1 \frac{(1+x)^r(1-x)^s-(1-x)^r(1+x)^s}{x}\,dx=\int_0^1 (1-x^2)^s\left[\frac{(1+x)^{r-s}-(1-x)^{r-s}}{x}\right]dx,$$

$$\frac{(1+x)^{r-s}-(1-x)^{r-s}}{x}=2\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{r-s}{2k+1}x^{2k},$$

$$b(s,r)=2\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{r-s}{2k+1}\int_0^1(1-x^2)^s x^{2k}dx.$$

Posons $x=\sqrt{x}$; d'où $dx=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$, il vient

$$b(s,r)=\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{r-s}{2k+1}\int_0^1(1-x)^s x^{k-\frac{1}{2}}dx,$$

$$=\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{r-s}{2k+1}\mathrm{B}\left(s+1,k+\frac{1}{2}\right).$$

Or,

$$\mathrm{B}\left(s+1,k+\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(s+1)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(s+\frac{3}{2}\right)}\,\frac{(2k-1)\,2k-3)\ldots 3.1}{(2s+2k+1)(2s+2k-1)\ldots(2s+3)},$$

donc,

$$b(s,r)=\frac{\sqrt{\pi}\,.\,\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(s+\frac{3}{2}\right)}\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{r-s}{2k+1}\frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 3.1}{(2s+2k+1)(2s+2k-1)-(2s+3)},$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(s+\frac{3}{2}\right)}\left[\frac{r-s}{1}.+\frac{(r-s)(r-s-1)(r-s-2)}{1.2.3}\,\frac{1}{2s+3}+\cdots\right].$$

Nous aurons donc ainsi

$$(45) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \cos(s+r)\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{s+r+1}} \cos r\frac{\pi}{2} + \frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}} T_1,$$

$$(46) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \sin(s+r)\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{s+r+1}} \sin r\frac{\pi}{2} - \frac{\cos r\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}} T_1,$$

en posant

$$T_1 = \frac{\sqrt{\pi}.\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(s+\frac{3}{2}\right)} \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{r-s}{2k+1} \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 3.1}{(2s+2k+1)(2s+2k-1)\ldots(2s+3)}.$$

23. La transcendante $b(s, r)$ sera réductible aux intégrales eulériennes dans les cas suivants :

1° $r = s + a$, a entier,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{s+a}\varphi \cos^s\varphi \cos(2s+a)\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{2s+a+1}} \cos(s+a)\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(s+a)\frac{\pi}{2}}{2^{2s+a+1}} T_2,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{s+a}\varphi \cos^s\varphi \sin(2s+a)\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{2s+a+1}} \sin(s+a)\frac{\pi}{2} - \frac{\cos(s+a)\frac{\pi}{2}}{2^{2s+a+1}} T_2,$$

$$T_2 = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(s+\frac{3}{2}\right)} \sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{2k+1} \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 5.3.1.}{(2s+2k+1)(2s+2k-1)\ldots(2s+3)}.$$

En particulier, $a = 1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{s+1}\varphi \cos^s\varphi \cos(2s+1)\varphi d\varphi = -\frac{\pi}{2^{2s+2}} \sin s\frac{\pi}{2} + \frac{\cos s\frac{\pi}{2}}{2^{2s+2}} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(s+\frac{3}{2}\right)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{s+1}\varphi \cos^s\varphi \sin(2s+1)\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{2s+2}} \cos s\frac{\pi}{2} + \frac{\sin s\frac{\pi}{2}}{2^{2s+2}} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(s+\frac{3}{2}\right)}.$$

2° $s = r + b$, $b =$ entier,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^{r+b}\varphi \cos(2r+b)\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{2r+b+1}} \cos r\frac{\pi}{2} + \frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{2r+b+1}} T_3,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^{r+b} \sin(2r+b)\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{2r+b+1}} \sin r\frac{\pi}{2} - \frac{\cos r\frac{\pi}{2}}{2^{2r+b+1}} T_3,$$

$$T_3 = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(r+1)}{\Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)} \sum_{k=0}^{k=b} \binom{b}{2k+1} \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 5.3.1}{(2r+2k+1)(2r+2k-1)\ldots(2r+3)}.$$

Pour $b = 2$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^{r+2}\varphi \cos 2(r+1)\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{2r+3}} \cos r\frac{\pi}{2} + \frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{2r+2}} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(r+1)}{\Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^{r+2}\varphi \sin 2(r+1)\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{2r+3}} \sin r\frac{\pi}{2} - \frac{\cos r\frac{\pi}{2}}{2^{2r+2}} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(r+1)}{\Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)} {}^*$$

24. Remarque. — $s = r$ donne deux intégrales connues :

(47) . . . . $$\int_0^{\pi} \sin^r\varphi \cos r\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^r} \cos r\frac{\pi}{2},$$

(48) . . . . $$\int_0^{\pi} \sin^r\varphi \sin r\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^r} \sin r\frac{\pi}{2}.$$

25. Si l'exposant r est un entier pair ou impair, les intégrales $A_{2a,s,s+2a}$ et $B_{2a+1,s,s+2a+1}$ sont immédiatement déterminées.

* Les équations (43) et (44) paraissent assez remarquables ; j'espère de faire un jour une étude plus complète de la transcendante,

$$b(s,r) = \int_0^1 \frac{(1+x)^r(1-x)^s - (1-x)^r(1+x)^s}{x} dx.$$

Soit $r = 2a$, $a = 1, 2, 3\ldots$

$$(49) \quad \ldots\ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a}\varphi \cos^{s}\varphi \cos(2a+s)\varphi d\varphi = (-1)^a \frac{\pi}{2^{s+2a+1}}.$$

$r = 2a + 1$, $a = 1, 2, 3, \ldots$

$$(50) \quad \ldots\ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a+1}\varphi \cos^{s}\varphi \sin(s+2a+1)\varphi d\varphi = (-1)^a \frac{\pi}{2^{s+2a+2}}. \ *$$

26. Nous avons dit, plus haut, que généralement les intégrales M_1 et M_2 ne sont pas réductibles aux fonctions eulériennes. Il existe plusieurs cas où cette réduction s'opère immédiatement.

Premier cas. $s = r$, $q - 2r > 0$.

$$A_{r,r,q} = -\frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{2r+1}} \int_0^1 x^{\frac{q-2r}{2}} (1-x^2)^r dx + \frac{\sin(q-r)\frac{\pi}{2}}{2^{2r+1}} \int_0^1 x^{\frac{q-2r}{2}-1} (1-x^2)^r dx,$$

C'est-à-dire

$$A_{r,r,q} = \frac{\sin(q-r)\frac{\pi}{2} - \sin r\frac{\pi}{2}}{2^{2r+2}} B\left(\frac{q-2r}{4}, r+1\right),$$

$$B_{r,r,q} = \frac{\cos r\frac{\pi}{2} - \cos(q-r)\frac{\pi}{2}}{2^{2r+2}} B\left(\frac{q-2r}{4}, r+1\right);$$

* Ces formules (49) et (50) résultent encore de celles-ci :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \cos q\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{p+1}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \cos(p+2k)\varphi d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos^p\varphi \sin q\varphi d\varphi = \frac{q}{p+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+1}\varphi \cos q\varphi d\varphi.$$

ou, plus simplement encore,

$$(51) \quad . \quad . \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi\cos\varphi)^r \cos q\varphi d\varphi = \frac{\cos q\frac{\pi}{4}\sin(q-2r)\frac{\pi}{4}}{2^{2r+1}} \mathrm{B}\left(\frac{q-2r}{4}, r+1\right),$$

$$(52) \quad . \quad . \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi\cos\varphi)^r \sin q\varphi d\varphi = \frac{\sin q\frac{\pi}{4}\sin(q-2r)\frac{\pi}{4}}{2^{2r+1}} \mathrm{B}\left(\frac{q-2r}{4}, r+1\right).$$

Faisons dans ces formules (51) et (52), $\varphi = \frac{\varphi}{2}$ et $\frac{q}{2} = n$, on a

$$(53) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\pi} \sin^r\varphi \cos n\varphi d\varphi = \frac{\cos n\frac{\pi}{2}\sin(n-r)\frac{\pi}{2}}{2^r} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-r}{2}\right)\Gamma(r+1)}{\Gamma\left(\frac{n+r}{2}+1\right)}, \\ &\int_0^{\pi} \sin^r\varphi \sin n\varphi d\varphi = \frac{\sin n\frac{\pi}{2}\sin(n-r)\frac{\pi}{2}}{2^r} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-r}{2}\right)\Gamma(r+1)}{\Gamma\left(\frac{n+r}{2}+1\right)}. \end{aligned} \right.$$

Ces formules supposent, $n - r > 0, r > -1$.

27. Remarque. — Dans les *Tables d'intégrales définies* de M. Bierens de Haan [Table 78], nous trouvons les formules suivantes données par Serret et Kummer. [*Journal de Liouville,* tome VIII. — *Journal de Crelle,* tome XVII.]

$$(\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \int_0^{\pi} \sin^{r-1}x \cos nx dx = 2^{r-1}\cos n\frac{\pi}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{r-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r+n}{2}\right)}{\Gamma(r-n)\Gamma(r+n)}\Gamma(r),$$

$$(\beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \int_0^{\pi} \sin^{r-1}x \sin nx dx = 2^{r-1}\sin n\frac{\pi}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{r-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r+n}{2}\right)}{\Gamma(r-n)\Gamma(r+n)}\Gamma(r).$$

Les formules (53) complètent les formules (α) et (β).

Quand on a $r > n > r - 1$, les formules (53) doivent coïncider avec les

formules (α) et (β), d'où l'identité :

$$\frac{\cos n\frac{\pi}{2}\sin(n-r+1)\frac{\pi}{2}}{2^{r-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-r+1}{2}\right)\Gamma(r)}{\Gamma\left(\frac{n+r+1}{2}\right)}=2^{r-1}\cos n\frac{\pi}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{r-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r+n}{2}\right)}{\Gamma(r-n)\Gamma(r+n)}\Gamma(r),$$

$$\sin\left[1-\frac{r-n+1}{2}\right]\pi\,\frac{\Gamma\left(\frac{n-r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+r+1}{2}\right)}=2^{2r-2}\frac{\Gamma\left(\frac{r-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r+n}{2}\right)}{\Gamma(r-n)\Gamma(r+n)}.$$

Mais,

$$\Gamma\left(1-\frac{r-n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r-n+1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\left(1-\frac{r-n+1}{2}\right)\pi},$$

d'où

$$\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{r-n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r+n+1}{2}\right)}=2^{2r-2}\frac{\Gamma\left(\frac{r-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r+n}{2}\right)}{\Gamma(r-n)\Gamma(r+n)}.$$

En vertu de la relation,

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p),$$

on a

$$\Gamma\left(\frac{r-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r-n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r+n+1}{2}\right)=\frac{\pi}{2^{2r-2}}\Gamma(r-n)\Gamma(r+n);$$

et l'identité est vérifiée.

Remarque II. — Si, après avoir multiplié les deux membres des équations (53) par $\frac{1}{2}\cos n\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{2}\sin n\frac{\pi}{2}$, nous ajoutons les résultats, nous aurons

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^r\varphi\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)d\varphi=\frac{\sin(n-r)\frac{\pi}{2}}{2^{r+1}}B\left(\frac{n-r}{2},r+1\right),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^r\varphi\cos n\varphi\,d\varphi=\frac{\sin(n-r)\frac{\pi}{2}}{2^{r+1}}B\left(\frac{n-r}{2},r+1\right).$$

REMARQUE III. — Dans le t. VIII du *Journal de Liouville*, A. Serret donne :

$$(a)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos x)^{\frac{p+q}{2}-1} \cos(q-p)x\,dx = \frac{1}{2}\cos(q-p)\frac{\pi}{4}\frac{B\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)}{B(p,q)} B\left(\frac{p+q}{2},\frac{p+q}{2}\right),$$

$$(b)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos x)^{\frac{p+q}{2}-1} \sin(q-p)x\,dx = \frac{1}{2}\sin(q-p)\frac{\pi}{4}\frac{B\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)}{B(p,q)} B\left(\frac{p+q}{2},\frac{p+q}{2}\right).$$

« La première de ces formules sera en défaut, dit Serret, si $\frac{p+q}{2}$ est égal » ou supérieur à 1 ; mais la seconde exige seulement que $\frac{p+q}{2}$ soit moindre » que 2. »

Changeons r en $r-1$ dans les formules (51) et (52) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos x)^{r-1} \cos qx\,dx = \frac{\cos q\frac{\pi}{4}\sin(q-2r+2)\frac{\pi}{4}}{2^{2r-1}} B\left(\frac{q-2r+2}{4}, r\right),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos x)^{r-1} \sin qx\,dx = \frac{\sin q\frac{\pi}{4}\sin(q-2r+2)\frac{\pi}{4}}{2^{2r-1}} B\left(\frac{q-2r+2}{4}, r\right).$$

Pour comparer la formule (*b*) à cette dernière, il faut supposer $q-p > p+q-2$, c'est-à-dire $1 > p > 0$.

Si l'on a simultanément $2 > \frac{p+q}{2} > 0$, $1 > p > 0$, on doit avoir, identiquement,

$$\frac{1}{2}\sin(q-p)\frac{\pi}{4}\frac{B\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)}{B(p,q)} B\left(\frac{p+q}{2},\frac{p+q}{2}\right) = \frac{\sin(q-p)\frac{\pi}{4}\sin(1-p)\frac{\pi}{2}}{2^{p+q-1}} B\left(\frac{1-p}{2},\frac{q+p}{2}\right),$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} = \frac{\sin(1-p)\frac{\pi}{2}}{2^{p+q-2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right)}.$$

Faisant usage des relations :

$$\Gamma(m)\,\Gamma(1-m)=\frac{\pi}{\sin m\pi},$$

$$\Gamma(p)\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\,\Gamma(2p),$$

nous trouvons

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}=\frac{\pi}{2^{p+q-2}\,\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right)},$$

$$\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right)=\frac{\pi}{2^{p+q-2}}\,\Gamma(p)\,\Gamma(q);$$

et l'identité est vérifiée.

28. *Deuxième cas.* Soit $q-s-r=2m$, $m=1,2,3,\ldots$
Les formules (36) et (37) deviennent

$$A_{r,s,q}=-\frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+1}}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^r(1+x)^s dx+\frac{\sin(r+2m)\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+1}}\int_0^1 x^{m-1}(1+x)^r(1-x)^s dx,$$

$$B_{r,s,q}=\frac{\cos r\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+1}}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^r(1+x)^s dx-\frac{\cos(r+2m)\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+1}}\int_0^1 x^{m-1}(1+x)^r(1-x)^s dx.$$

Dans la seconde intégrale, changeons x en $-x$:

$$\frac{(-1)^m\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+1}}\int_0^1 x^{m-1}(1+x)^r(1-x)^s dx=\frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+1}}\int^{-1} x^{m-1}(1-x)^r(1+x)^s dx,$$

d'où

$$A_{r,s,q}=-\frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+1}}\int_{-1}^{+1} x^{m-1}(1-x)^r(1+x)^s dx=\frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+1}}\int_2^0(1-x)^{m-1}x^r(2-x)^s dx;$$

Digitized by Google

puis, en posant $x = 2z$,

$$A_{r,s,q} = -\sin r\frac{\pi}{2}\int_0^1 (1-2z)^{m-1}z^r(1-z)^s dz.$$

Nous obtenons ainsi les deux formules :

$$(54)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi\cos^s\varphi\cos(r+s+2m)\varphi d\varphi = \sin r\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=m-1}(-1)^{k+1}\binom{m-1}{k}B(r+k+1, s+1)\,2^k, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi\cos^s\varphi\sin(r+s+2m)\varphi d\varphi = \cos r\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=m-1}(-1)^{k}\binom{m-1}{k}B(r+k+1, s+1)\,2^k. \end{cases}$$

Ces formules sont vraies pour $r > -1$, $s > -1$.

Il est à peu près inutile de dire que, pour $k = 0$, $\binom{m-1}{k}$ représente l'unité.

On transforme les formules (54) de la façon suivante :

$$A_{r,s,s+r+2m} = \sin r\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=m-1}(-1)^{k+1}\binom{m-1}{k}\frac{\Gamma(r+k+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+k+2)}2^k,$$

$$\frac{\Gamma(r+k+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+k+2)} = \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)}\frac{(r+k)(r+k-1)\dots(r+1)}{(r+s+k+1)\dots(r+s+2)},$$

donc,

$$(55)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi\cos^s\varphi\cos(s+r+2m)\varphi d\varphi \\ \displaystyle= \sin r\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)}\sum_{k=0}^{k=m-1}(-1)^{k+1}\binom{m-1}{k}\frac{(r+k)(r+k-1)\dots(r+1)}{(r+s+k+1)\dots(r+r+2}2^k, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi\cos^s\varphi\sin(s+r+2m)\varphi d\varphi \\ \displaystyle= \cos r\frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)}\sum_{k=0}^{k=m-1}(-1)^{k}\binom{m-1}{k}\frac{(r+k)(r+k-1)\dots(r+1)}{(r+s+k+1)\dots(r+s+2)}2^k. \end{cases}$$

29. Remarque I. — Dans les *Tables d'intégrales définies* de M. Bierens de Haan [Table 57], nous trouvons

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1}x \cos^{2b-2a-1}x \cos 2bx dx = (-1)^a \frac{(2a-1)(2a-2)..3.2.1\,(2b-2a-1)...3.2.1}{(2b-1)(2b-2)...3.2.1},$$

a et b entiers, $2b = 2a+1$.

La première formule (55) est applicable :

$$r = 2a-1, \quad s = 2b-2a-1, \quad s+r = 2b-2, \quad q = 2b;$$

donc $m = 1$, et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1}x \cos^{2b-2a-1}x \cos 2bx dx = \cos a\pi \frac{\Gamma(2a)\Gamma(2b-2a)}{\Gamma(2b)}.$$

Remarque II. — Faisons dans les formules (55) $m=1$ et changeons s en $s-1$ et r en $r-1$.

Nous aurons

$$(56) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-1}x \cos^{s-1}x \cos(s+r)x dx = \cos r \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(s+r)}, \\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-1}x \cos^{s-1}x \sin(s+r)x dx = \sin r \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(s+r)}. \end{aligned} \right.$$

Ces formules supposent $r > 0$, $s > 0$.

Serret, dans le tome VIII du *Journal de Liouville;* Schlömilch, dans ses *Analytischen Studien,* page 155 ; Kummer, dans le *Journal de Crelle,* tomes XVII et XX, donnent les formules (56) pour $2 > r > 0$. [Voir également les *Tables d'intégrales définies* de M. Bierens de Haan, table 57]. — Les formules (55) et (56) constituent une extension et une généralisation des résultats trouvés par ces géomètres.

30. *Troisième cas.* $r = 2a$, $a = 1, 2, 3\ldots$

$A_{r,s,q}$ est réductible aux intégrales eulériennes; effectivement $\sin^{2a}\varphi$ s'ex-



prime rationnellement en fonctions des puissances de $\cos\varphi$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a}\varphi \cos^s\varphi \cos q\varphi d\varphi = \frac{\sin(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{2a+s+1}} \sum_{k=0}^{k=2a} \binom{2a}{k} B\left(\frac{q-s-2a}{2}+k, s+1\right),$$

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a}\varphi \cos^s\varphi \cos q\varphi d\varphi \\ &= \frac{\sin(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{2a+s+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{q-s-2a}{2}\right)\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(\frac{q-s-2a}{2}+1\right)} \left[\sum_{k=0}^{k=2a} \binom{2a}{k} \frac{(q-s-2a+2k-2)\ldots(q-s-2a)}{(q+s-2a+2k)\ldots(q+s-2a+2)}\right].\end{aligned}\right.$$

31. *Quatrième cas.* $r = 2a+1$; $B_{2a+1,s,q}$ est exprimable au moyen des fonctions Γ ; il doit en être ainsi, puisqu'on a la relation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos^s\varphi \sin q\varphi d\varphi = \frac{q}{s+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{s+1}\varphi \cos q\varphi d\varphi.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a+1}\varphi \cos^s\varphi \sin q\varphi d\varphi = -\frac{\cos(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{2a+s+2}} \sum_{k=0}^{k=2a+1} \binom{2a+1}{k} B\left(\frac{q-s-2a-1}{2}+k, s+1\right).$$

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a+1}\varphi \cos^s\varphi \sin q\varphi d\varphi \\ &= -\frac{\cos(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{2a+s+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{q-s-2a-1}{2}\right)\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(\frac{q+s-2a-1}{2}+1\right)} \left[\sum_{k=0}^{k=2a+1} \binom{2a+1}{k} \frac{(q-s-2a+2k-3)\ldots(q-s-2a-1)}{(q+s-2a+2k+1)\ldots(q+s-2a+1)}\right].\end{aligned}\right.$$

32. *Cinquième cas.* $s = 1, 2, 3, \ldots$ $q - s = 2b$, $b = 1, 2, 3, \ldots$ $b > \frac{r}{2}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^a\varphi \cos(a+2b)\varphi d\varphi = -\frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{a+r+1}} \sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k} B\left(\frac{2b-r}{2}+k, r+1\right),$$

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^a\varphi \cos(a+2b)\varphi d\varphi \\ &= -\frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{a+r+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{2b-r}{2}\right)\Gamma(r+1)}{\Gamma\left(\frac{2b+r}{2}+1\right)} \left[\sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k} \frac{(2b-r+2k-2)\ldots(2b-r)}{(2b+r+2k)\ldots(2b+r+2)}\right].\end{aligned}\right.$$

33. *Sixième cas.* $s = a = 1, 2, 3, \ldots$ $q - s = 2b + 1$, $b = 1, 2, 3 \ldots$ $2b - r + 1 > 0$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \sin(a + 2b + 1)\varphi d\varphi = \frac{\cos r\frac{\pi}{2}}{2^{a+r+1}} \sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k} \mathrm{B}\left(\frac{2b - r + 1}{2} + k, r + 1\right),$$

(60)
$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \sin(a + 2b + 1)\varphi d\varphi \\ &= \frac{\cos r\frac{\pi}{2}}{2^{a+r+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{2b - r + 1}{2}\right)\Gamma(r + 1)}{\Gamma\left(\frac{2b + r + 1}{2} + 1\right)} \left[\sum_{k=0}^{k=a} \binom{a}{k} \frac{(2b - r + 2k - 1)\ldots(2b - r + 1)}{(2b + r + 2k + 1)\ldots(2b + r + 3)}\right]. \end{aligned}\right.$$

34. *Septième cas.* $r = s + a$, $a = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{s+a}\varphi \cos^s\varphi \cos q\varphi d\varphi = -\frac{\sin(a + s)\frac{\pi}{2}}{2^{a+2s+1}} \int_0^1 x^{\frac{q-a-2s}{2}-1}(1 - x)^{a+s}(1 + x)^s dx$$

$$+ \frac{\sin(q - s)\frac{\pi}{2}}{2^{a+2s+1}} \int_0^1 x^{\frac{q-a-2s}{2}-1}(1 + x)^{a+s}(1 - x)^s dx,$$

$$\int_0^1 x^{\frac{q-a-2s}{2}-1}(1 - x)^{a+s}(1 - x)^s dx = \sum_{k=0}^{k=a}(-1)^k \binom{a}{k} \int_0^1 x^{\frac{q-a-2s}{2}+k-1}(1 - x^2)^s dx.$$

Puis, par le changement de x en $\sqrt{x}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a+s}\varphi \cos^s\varphi \cos q\varphi d\varphi$$

$$= \sum_{k=0}^{k=a}\left[\left(\frac{\sin(q - s)\frac{\pi}{2} + (-1)^{k+1}\sin(a + s)\frac{\pi}{2}}{2^{a+2s+2}}\right)\binom{a}{k} \mathrm{B}\left(\frac{q - 2s - a + 2k}{4}, s + 1\right)\right]$$

Nous avons deux cas à distinguer : supposons d'abord que a est un nombre

pair $2b$; nous partageons la somme en deux parties :

$$\sum_{k=0}^{k=2b}\binom{2b}{k}\mathrm{B}\left(\frac{q-2s-2b+2k}{4},s+1\right)=\sum_{m=0}^{m=b}\binom{2b}{2m}\frac{\Gamma\left(\frac{q-2s-2b}{4}+m\right)\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(\frac{q+2s-2b}{4}+m+1\right)}$$

$$+\sum_{m=0}^{m=b-1}\binom{2b}{2m+1}\frac{\Gamma\left(\frac{q-2s-2b}{4}+m+\frac{1}{2}\right)\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(\frac{q+2s-2b}{4}+\frac{1}{2}+1+m\right)}.$$

$$\sum_{m=0}^{m=b}\binom{2b}{2m}\frac{\Gamma\left(\frac{q-2s-2b}{4}+m\right)\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(\frac{q+2s-2b}{4}+m+1\right)}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{q-2s-2b}{4}\right)\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(\frac{q+2s-2b}{4}+1\right)}\left[\sum_{m=0}^{m=b}\binom{2b}{2m}\frac{(q-2s-2b+4m-4)\ldots(q-2s-2b)}{(q+2s-2b+4m)\ldots(q+2s-2b+4)}\right].$$

Pour $k=0,2,4,6,\ldots$, le facteur trigonométrique a constamment la forme

$$\frac{\sin(q-s)\frac{\pi}{2}-\sin(2b+s)\frac{\pi}{2}}{2^{2b+2s+2}}=\frac{\cos(2b+q)\frac{\pi}{4}\sin(q-2b-2s)\frac{\pi}{4}}{2^{2b+2s+1}},$$

et, pour $k=1,3,5,\ldots$, ce même facteur est égal à

$$\frac{\sin(2b+q)\frac{\pi}{4}\cos(q-2b-2s)\frac{\pi}{4}}{2^{2b+2s+1}}.$$

Nous aurons, finalement,

$$(61)\quad\left\{\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{s+2b}\varphi\cos^{s}\varphi\cos q\varphi\,d\varphi\\&=\frac{\cos(2b+q)\frac{\pi}{4}\sin(q-2b-s)\frac{\pi}{4}}{2^{2b+2s+1}}\mathrm{M}_1+\frac{\sin(2b+q)\frac{\pi}{4}\cos(q-2b-2s)\frac{\pi}{4}}{2^{2b+s+1}}\mathrm{M}_2,\end{aligned}\right.$$

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{s+2b}\varphi \cos^s\varphi \sin q\varphi d\varphi \\ &= \frac{\sin(2b+q)\frac{\pi}{4}\sin(q-2b-2s)\frac{\pi}{4}}{2^{2b+2s+1}}\mathrm{M}_1 - \frac{\cos(2b+q)\frac{\pi}{4}\sin(q-2b-2s)\frac{\pi}{4}}{2^{2b+2s+1}}\mathrm{M}_2, \end{aligned}\right.$$

$$(63)\quad \mathrm{M}_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{q-2s-2b}{4}\right)\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(\frac{q+2s-2b}{4}+1\right)}\left[\sum_{m=0}^{m=b}\binom{2b}{2m}\frac{(q-2s-2b+4m-4)\ldots(q-2s-2b)}{(q+2s-2b+4m)\ldots(q+2s-2b+4)}\right],$$

$$(64)\quad \mathrm{M}_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{q-2s-2b}{4}+\frac{1}{2}\right)\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(\frac{q+2s-2b}{4}+\frac{3}{2}\right)}\left[\sum_{m=0}^{m=b-1}\binom{2b}{2m+1}\frac{(q-2s-2b+4m-2)\ldots(q-2s-2b+2)}{(q+2s-2b+4m+2)\ldots(q+2s-2b+6)}\right].$$

Si a est un nombre impair $2b+1$, nous aurons, semblablement

$$(65)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{s+2b+1}\varphi \cos^s\varphi \cos q\varphi d\varphi \\ &= \frac{\cos(2b+1+q)\frac{\pi}{4}\sin(q-2b-1-2s)\frac{\pi}{4}}{2^{2b+2s+2}}\mathrm{M}_3 + \frac{\sin(2b+q+1)\frac{\pi}{4}(\cos q-2b-2s-1)\frac{\pi}{4}}{2^{2b+2s+2}}\mathrm{M}_4, \end{aligned}\right.$$

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{s+2b+1}\varphi \cos^s\varphi \sin q\varphi d\varphi \\ &= \frac{\sin(2b+q+1)\frac{\pi}{4}\sin(q-2b-2s-1)\frac{\pi}{4}}{2^{2b+2s+2}}\mathrm{M}_3 - \frac{\cos(2b+q+1)\frac{\pi}{4}\sin(q-2b-2s-1)\frac{\pi}{4}}{2^{2b+2s+2}}\mathrm{M}_4, \end{aligned}\right.$$

$$(67)\quad \mathrm{M}_3 = \frac{\Gamma\left(\frac{q-2b-2s-1}{4}\right)\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(\frac{q-2b+2s-1}{4}+1\right)}\left[\sum_{m=0}^{m=b}\binom{2b+1}{2m}\frac{(q-2b-2s+4m-5)\ldots(q-2b-2s-1)}{(q-2b+2s+4m-1)\ldots(q-2b-2s+5)}\right],$$

$$(68)\quad \mathrm{M}_4 = \frac{\Gamma\left(\frac{q-2b-2s+1}{4}\right)\Gamma(s+1)}{\Gamma\left(\frac{q-2b+2s+1}{4}+1\right)}\left[\sum_{m=0}^{m=b}\binom{2b+1}{2m+1}\frac{(q-2b-2s+4m-3)\ldots(q-2b-2s+1)}{(q-2b+2s+4m+1)\ldots(q-2b+2s+5)}\right].$$

35. Si $s = r + a$, les intégrales $A_{r,s,q}$ et $B_{r,s,q}$ sont également réductibles aux intégrales eulériennes. Il est inutile d'entrer dans de plus amples détails; les calculs précédents indiquent suffisamment la marche à suivre.

36. Si $r = 2a$, $a = 1, 2, 3, \ldots$ $q = s + 2b$, $b = 1, 2, 3, \ldots$

$$(69) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a}\varphi \cos^s\varphi \cos(s + 2b)\varphi d\varphi = 0 \quad b > a, s > -1. \; *$$

37. Si $r = 2a + 1$, $q = s + 2b + 1$, a et b entiers,

$$(70) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a+1}\varphi \cos^s\varphi \sin(s + 2b + 1)\varphi d\varphi = 0, \quad b > a, s > -1. \; *$$

38. Remarque. — Cauchy, dans le 28me cahier du *Journal de l'École polytechnique*, donne :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1}x \cos^{b-2a-1}x \sin bx dx = 0, \quad b > 2a,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a}x \cos^{b-2a-2}x \cos bx dx = 0, \quad b > 2a + 1.$$

a et b étant des nombres entiers.

Ces formules s'accordent avec les formules (69) et (70), qui sont une généralisation des premières. Je trouve ces formules de Cauchy dans les *Tables d'intégrales définies* de M. Bierens de Haan, Table 57.

* Les formules (69) et (70) sont une conséquence des équations :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \cos(p + 2k)\varphi d\varphi = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos^p\varphi \sin q\varphi d\varphi = \frac{q}{p+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+1}\varphi \cos q\varphi d\varphi.$$

CHAPITRE IV.

39. Nous allons chercher, actuellement, les valeurs des intégrales :

$$A_{r,s,q} = \int_0^\pi \sin^r\varphi \cos^s\varphi \cos q\varphi d\varphi, \quad B_{r,s,q} = \int_0^\pi \sin^r\varphi \cos^s\varphi \sin q\varphi d\varphi.$$

Il est visible que des restrictions doivent être apportées à l'analyse précédente : pour que ces intégrales soient réelles, il faut que la fonction à intégrer ne devienne jamais imaginaire entre les limites de l'intégration. Ainsi, s ne peut pas être quelconque ; s doit nécessairement être de la forme a, $\frac{2a}{p}$, $\frac{2a+1}{2b+1}$, a et b étant entiers, p quelconque.

Nous supposons toujours

$$q - s - r > 0, \quad s > -1, \quad r > -1.$$

Ramenons ces intégrales entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$:

$$A_{r,s,q} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^r\varphi \cos^s\varphi \cos q\varphi d\varphi.$$

Changeons, dans la seconde intégrale, φ en $\frac{\pi}{2} + \varphi$:

$$A_{r,s,q} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \cos q\varphi d\varphi + (-1)^s$$

$$\left[\cos q \frac{\pi}{2} \int^{\frac{\pi}{2}} \cos^r\varphi \sin^s\varphi \cos q\varphi d\varphi - \sin q \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^r\varphi \sin^s\varphi \sin q\varphi d\varphi\right].$$

C'est-à-dire

$$(71)\quad \left[A_{r,s,q}\right]_0^{\pi} = \left[A_{r,s,q}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (-1)^s \left[\cos q\frac{\pi}{2}\left(A_{s,r,q}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin q\frac{\pi}{2}\left(B_{s,r,q}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}\right].$$

$$(72)\quad \left[B_{r,s,q}\right]_0^{\pi} = \left[B_{r,s,q}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (-1)^s \left[\sin q\frac{\pi}{2}\left(A_{s,r,q}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos q\frac{\pi}{2}\left(B_{s,r,q}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}\right].$$

$$\begin{aligned}\left[A_{s,r,q}\right]_0^{\pi} = &-\frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}}M_1 + \frac{\sin(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}}M_2 \\ &+ (-1)^s\cos q\frac{\pi}{2}\left[-\frac{\sin s\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}}M_2 + \frac{\sin(q-r)\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}}M_1\right] \\ &+ (-1)^s\sin q\frac{\pi}{2}\left[\frac{\cos s\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}}M_2 - \frac{\cos(q-r)\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}}M_1\right].\end{aligned}$$

Nous avons deux cas à distinguer, suivant que $(-1)^s = \pm 1$.

40. $(-1)^s = +1$.

$$(73)\quad \ldots\ldots A_{r,s,q} = \frac{\cos q\frac{\pi}{2}\sin(q-r)\frac{\pi}{2}}{2^{s+r}}M_1 - \frac{\cos q\frac{\pi}{2}\sin s\frac{\pi}{2}}{2^{s+r}}M_2.$$

$$(74)\quad \ldots\ldots B_{r,s,q} = \frac{\sin q\frac{\pi}{2}\sin(q-r)\frac{\pi}{2}}{2^{s+r}}M_1 - \frac{\sin q\frac{\pi}{2}\sin s\frac{\pi}{2}}{2^{s+r}}M_2.$$

41. $(-1)^s = -1$.

$$(75)\quad \ldots\ldots A_{r,s,q} = -\frac{\sin q\frac{\pi}{2}\cos(q-r)\frac{\pi}{2}}{2^{s+r}}M_1 + \frac{\sin q\frac{\pi}{2}\cos s\frac{\pi}{2}}{2^{s+r}}M_2.$$

$$(76)\quad \ldots\ldots B_{r,s,q} = \frac{\cos q\frac{\pi}{2}\cos(q-r)\frac{\pi}{2}}{2^{s+r}}M_1 - \frac{\cos q\frac{\pi}{2}\cos s\frac{\pi}{2}}{2^{s+r}}M_2.$$

Examinons quelques cas particuliers :

42. $q = r + 2b$, $s = 2a$, $b > a$, $r > -1$, a et b entiers,

$$(77) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\pi \sin^r\varphi \cos^{2a}\varphi \cos(r+2b)\varphi d\varphi = 0, \\ &\int_0^\pi \sin^r\varphi \cos^{2a}\varphi \sin(r+2b)\varphi d\varphi = 0. \end{aligned} \right.$$

43. $q = r + 2b + 1$, $s = 2a + 1$, $b > a$, $r > -1$, a et b entiers,

$$(78) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\pi \sin^r\varphi \cos^{2a+1}\varphi \cos(r+2b+1)\varphi d\varphi = 0, \\ &\int_0^\pi \sin^r\varphi \cos^{2a+1}\varphi \sin(r+2b+1)\varphi d\varphi = 0. \end{aligned} \right.$$

44. Les intégrales, $\int_0^\pi \sin^r\varphi \cos^s\varphi \cos q\varphi d\varphi$, $\int_0^\pi \sin^r\varphi \cos^s\varphi \sin q\varphi d\varphi$, sont exprimables, au moyen des intégrales eulériennes, dans les mêmes cas que les intégrales de ces fonctions prises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Premier cas. $(-1)^s = 1$, $s = r$.

$$A_{r,r,q} = M_1 \cos q\frac{\pi}{2} \frac{\sin(q-r)\frac{\pi}{2} - \sin r\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}}.$$

$$(79) \qquad A_{r,r,q} = M_1 \cos q\frac{\pi}{2} \frac{\cos q\frac{\pi}{4} \sin(q-2r)\frac{\pi}{4}}{2^{s+r}}.$$

$$(80) \qquad B_{r,r,q} = M_1 \sin q\frac{\pi}{2} \frac{\cos q\frac{\pi}{4} \sin(q-2r)\frac{\pi}{4}}{2^{s+r}}.$$

Deuxième cas. $(-1)^s = -1$, $s = r$.

$$(81) \qquad A_{r,r,q} = M_2 \frac{\sin q\frac{\pi}{2} \sin q\frac{\pi}{4} \sin(q-2r)\frac{\pi}{4}}{2^{2r-1}}.$$

$$(82) \qquad B_{r,r,q} = -M_2 \frac{\cos q\frac{\pi}{2} \sin q\frac{\pi}{4} \sin(q-2r)\frac{\pi}{4}}{2^{2r-1}}.$$

Or,

$$M_1 = M_2 = \frac{1}{2} B\left(\frac{q-2r}{4}, r+1\right);$$

nous aurons ainsi les quatre formules :

$(-1)^r = +1$

(83) $$\int_0^\pi (\sin\varphi\cos\varphi)^r \cos q\varphi d\varphi = \frac{\cos q\frac{\pi}{2}\cos\varphi\frac{\pi}{4}\sin(q-2r)\frac{\pi}{4}}{2^{2r}} B\left(\frac{q-2r}{4}, r+1\right),$$

(84) $$\int_0^\pi (\sin\varphi\cos\varphi)^r \sin q\varphi d\varphi = \frac{\sin q\frac{\pi}{2}\cos\varphi\frac{\pi}{4}\sin(q-2r)\frac{\pi}{4}}{2^{2r}} B\left(\frac{q-2r}{4}, r+1\right),$$

$(-1)^r = -1$

(85) $$\int_0^\pi (\sin\varphi\cos\varphi)^r \cos q\varphi d\varphi = \frac{\sin q\frac{\pi}{2}\sin q\frac{\pi}{4}\sin(q-2r)\frac{\pi}{4}}{2^{2r}} B\left(\frac{q-2r}{4}, r+1\right),$$

(86) $$\int_0^\pi (\sin\varphi\cos\varphi)^r \sin q\varphi d\varphi = -\frac{\cos q\frac{\pi}{2}\sin q\frac{\pi}{4}\sin(q-2r)\frac{\pi}{4}}{2^{2r}} B\left(\frac{q-2r}{4}, r+1\right).$$

Changeons maintenant φ en $\frac{\varphi}{2}$ et q en $2q$, nous obtenons quatre nouvelles formules :

$(-1)^r = +1$

(87) . . $$\int_0^{2\pi} \sin^r\varphi \cos q\varphi d\varphi = \frac{\cos q\pi\cos\varphi\frac{\pi}{2}\sin(q-r)\frac{\pi}{2}}{2^{r-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{q-r}{2}\right)\Gamma(r+1)}{\Gamma\left(\frac{q+r}{2}+1\right)},$$

(88) . . $$\int^{2\pi} \sin^r\varphi \cos q\varphi d\varphi = \frac{\sin q\pi\cos q\frac{\pi}{2}\sin(q-r)\frac{\pi}{2}}{2^{r-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{q-r}{2}\right)\Gamma(r+1)}{\Gamma\left(\frac{q+r}{2}+1\right)},$$

$$(-1)^r = -1$$

$$(89) \quad . \quad . \quad \int_0^{2\pi} \sin^r\varphi \cos q\varphi d\varphi = \frac{\sin q\pi \sin q\frac{\pi}{2} \sin(q-r)\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{q-r}{2}\right)\Gamma(r+1)}{2^{r-1}\,\Gamma\left(\frac{q+r}{2}+1\right)},$$

$$(90) \quad . \quad . \quad \int_0^{2\pi} \sin^r\varphi \sin q\varphi d\varphi = -\frac{\cos q\pi \sin q\frac{\pi}{2} \sin(q-r)\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{q-r}{2}\right)\Gamma(r+1)}{2^{r-1}\,\Gamma\left(\frac{q+r}{2}+1\right)}.$$

Ces formules subsistent pour toutes les valeurs de r et de q satisfaisant aux conditions

$$r > -1, \quad q - r > 0,$$

r étant de la forme $a, \frac{2a}{p}, \frac{2a+1}{2b+1}$, a et b entiers et p quelconque.

45. *Deuxième cas.* $(-1)^s = +1$, $q = s + r + 2m$, m entier.

$$A_{r,s,s+r+2m} = \frac{\cos(r+s+2m)\frac{\pi}{2}\sin(s+2m)\frac{\pi}{2}M_1 - \cos(r+s+2m)\frac{\pi}{2}\sin s\frac{\pi}{2}M_2}{2^{s+r}}$$

$$= \cos(s+r)\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\frac{M_1 - (-1)^m M_2}{2^{s+r}}.$$

Changeons dans M_2 x en $-x$:

$$M_2 = (-1)^{m+1}\int_{-1}^{0} x^{m-1}(1-x)^r(1+x)^s dx.$$

$$A_{r,s,s+r+2m} = \frac{\cos(s+r)\frac{\pi}{2}\sin s\frac{\pi}{2}}{2^{s+r}}\int_{-1}^{+1} x^{m-1}(1-x)^r(1+x)^s dx.$$

Les deux transformations $x = 1 - x'$, $x' = 2x''$, faites successivement, nous donneront :

$$A_{r,s,s+r+2m} = 2\cos(s+r)\frac{\pi}{2}\sin s\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}B(r+k+1, s+1)\,2^k.$$

Nous aurons finalement : $(-1)^s = +1$

$$(91)\quad \int_0^\pi \sin^r\varphi\cos^s\varphi\cos(s+r+2m)\varphi\, d\varphi = 2\cos(s+r)\frac{\pi}{2}\sin s\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}\mathrm{B}(r+k+1,s+1)\,2^k,$$

$$(92)\quad \int_0^\pi \sin^r\varphi\cos^s\varphi\sin(s+r+2m)\varphi\, d\varphi = 2\sin(s+r)\frac{\pi}{2}\sin s\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}\mathrm{B}(r+k+1,\ s+1)\,2^k.$$

$(-1)^s = -1$

$$(93)\quad \int_0^\pi \sin^r\varphi\cos^s\varphi\cos(s+r+2m)\varphi\, d\varphi = -2\sin(s+r)\frac{\pi}{2}\cos s\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}\mathrm{B}(r+k+1,s+1)\,2^k,$$

$$(94)\quad \int_0^\pi \sin^r\varphi\cos^s\varphi\sin(s+r+2m)\varphi\, d\varphi = 2\cos(s+r)\frac{\pi}{2}\cos s\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}\mathrm{B}(r+k+1,s+1)\,2^k.$$

Nous connaissons d'ailleurs la transformation à faire subir à

$$\sum_{k=0}^{k=m-1}(-1)^k\binom{m-1}{k}\mathrm{B}(r+k+1,s+1)\,2^k.$$

46. Si $s = 2a$, $a = 1, 2, 3, \ldots$

$$(95)\quad \int_0^\pi \sin^r\varphi\cos^{2a}\varphi\cos q\varphi\, d\varphi = \frac{\cos q\frac{\pi}{2}\sin(q-r)\frac{\pi}{2}}{2^{2a+r}}\int_0^1 x^{\frac{q-2a-r}{2}-1}(1-x)^r(1+x)^{2a}dx.$$

$$(96)\quad \int_0^\pi \sin^r\varphi\cos^{2a}\varphi\sin q\varphi\, d\varphi = \frac{\sin q\frac{\pi}{2}\sin(q-r)\frac{\pi}{2}}{2^{2a+r}}\int_0^1 x^{\frac{q-2a-r}{2}-1}(1-x)^r(1+x)^{2a}dx.$$

47. Si $s = 2a+1$, $a = 1, 2, 3, \ldots$

$$(97)\quad \int_0^\pi \sin^r\varphi\cos^{2a+1}\varphi\cos q\varphi\, d\varphi = -\frac{\sin q\frac{\pi}{2}\cos(q-r)\frac{\pi}{2}}{2^{2a+r+1}}\int_0^1 x^{\frac{q-2a-r-1}{2}-1}(1-x)^r(1+x)^{2a+1}dx,$$

$$(98)\quad \int_0^\pi \sin^r\varphi\cos^{2a+1}\varphi\sin q\varphi\, d\varphi = \frac{\cos q\frac{\pi}{2}\cos(q-r)\frac{\pi}{2}}{2^{2a+r+1}}\int_0^1 x^{\frac{q-2a-r-1}{2}-1}(1-x)^r(1+x)^{2a+1}dx.$$

48. $r = 2a,\ q = r + 2b,\ (-1)^s = +1$

$$(99)\quad \int_0^\pi \sin^{2a}\varphi \cos^s\varphi \cos 2(a+b)\varphi d\varphi = (-1)^{a+b+1} \frac{\sin s\frac{\pi}{2}}{2^{s+2a}} \int_0^1 x^{\frac{2b-s}{2}-1}(1+x)^{2a}(1-x)^s dx.$$

$r = 2a + 1,\ q = r + 2b,\ (-1)^s = -1$

$$(100)\quad \int_0^\pi \sin^{2a+1}\varphi \cos^s\varphi \cos(2a+2b+1)\varphi d\varphi = (-1)^{a+b} \frac{\cos s\frac{\pi}{2}}{2^{s+2a+1}} \int_0^1 x^{\frac{2b-s}{2}-1}(1+x)^{2a+1}(1-x)^s dx.$$

$r = 2a + 1,\ q = r + 2b,\ (-1)^s = +1$

$$(101)\quad \int_0^\pi \sin^{2a+1}\varphi \cos^s\varphi \sin(2a+2b+1)\varphi d\varphi = (1-)^{a+b+1} \frac{\sin s\frac{\pi}{2}}{2^{2a+s+1}} \int_0^1 x^{\frac{2b-s}{2}-1}(1+x)^{2a+1}(1-x)^s dx.$$

Les intégrales (95), (96), (97), (98), (99), (100), (101) sont donc réductibles aux fonctions eulériennes.

49. Si nous avons $s = r + a$ ou $r = s + a$, a désignant toujours un nombre entier, les intégrales

$$\int_0^\pi \sin^r\varphi \cos^s\varphi \cos q\varphi d\varphi, \quad \int_0^\pi \sin^r\varphi \cos^s\varphi \sin q\varphi d\varphi$$

sont encore exprimables au moyen des intégrales eulériennes. Nous n'entrerons dans aucun détail; le calcul de ces intégrales se fera d'après la méthode indiquée plusieurs fois.

CHAPITRE V.

50. S'il fallait chercher les valeurs des intégrales

$$A_{r,s,q} = \int_0^{2\pi} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \cos q\varphi d\varphi. \quad B_{r,s,q} = \int_0^{2\pi} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \sin q\varphi d\varphi,$$

il serait nécessaire de faire une nouvelle restriction.

L'intégrale $A_{r,s,q}$ se décompose ainsi :

$$\int_0^{2\pi} = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}.$$

Dans la seconde intégrale, faisons $\varphi = \pi + \varphi$,

$$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = (-1)^{r+s} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \cos q (\pi - \varphi) d\varphi$$

$$= (-1)^{r+s} \left[\cos q\pi \left(A_{r,s,q}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin q\pi \left(B_{r,s,q}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} \right].$$

Semblablement,

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = (-1)^r \left[\cos 3q \frac{\pi}{2} \left(A_{r,s,q}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3q \frac{\pi}{2} \left(B_{s,r,q}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} \right],$$

par conséquent,

$$\left[A_{r,s,q}\right]_0^{2\pi} = \left[A_{r,s,q}\right]_0^{\pi} + (-1)^{r+s} \left[\cos q\pi \left(A_{r,s,q}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin q\pi \left(B_{r,s,q}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} \right]$$
$$+ (-1)^r \left[\cos 3q \frac{\pi}{2} \left(A_{s,r,q}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin 3q \frac{\pi}{2} \left(B_{s,r,q}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} \right].$$

Ainsi donc, pour que l'intégrale $\int_0^{2\pi} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \cos q\varphi d\varphi$ soit réelle, il faut

les trois conditions suivantes :

$$(-1)^s = \pm 1, \quad (-1)^{r+s} = \pm 1, \quad (-1)^r = \pm 1.$$

dont l'une est la conséquence des deux autres.

En suivant pas à pas la méthode que nous avons suffisamment indiquée, on calculerait, sans aucune difficulté, les valeurs de ces intégrales

$$\Big[A_{r,s,q}\Big]_0^{2\pi}, \quad \Big[B_{r,s,q}\Big]_0^{2\pi},$$

lesquelles dépendent des transcendantes M_1, M_2. On distinguera sans peine dans quels cas ces intégrales s'annulent ou se réduisent aux fonctions eulériennes.

Enfin, plus généralement, ce procédé permettra de ramener les transcendantes trigonométriques

$$\int_0^{m\pi} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \cos q\varphi d\varphi, \quad \int_0^{m\pi} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \sin q\varphi d\varphi$$

aux transcendantes algébriques :

$$M_1 = \int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1-x)^s(1+x)^r dx.$$

$$M_2 = \int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1+x)^r(1-x)^s dx;$$

c'est-à-dire qu'on aura

$$\int_0^{m\pi} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \cos q\varphi d\varphi = A_1M_1 + A_2M_2,$$

$$\int_0^{m\pi} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \sin q\varphi d\varphi = B_1M_1 + B_2M_2,$$

A_1, A_2, B_1, B_2 étant des facteurs trigonométriques.



CHAPITRE VI.

51. Les développements, en série trigonométrique des fonctions $\cos^p\varphi \cos q\varphi$, $\cos^p\varphi \sin q\varphi$, etc..., peuvent encore servir à l'étude de certaines intégrales définies plus générales.

Soit, par exemple, à rechercher l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \cos q\varphi\, f(\varphi)\, d\varphi.$$

Si l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos m\varphi f(\varphi)\, d\varphi$ est connue, on pourra, dans certains cas, exprimer, sous forme finie, la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \cos q\varphi\, f(\varphi)\, d\varphi.$$

52. Application. — Dans le tome VIII du *Journal de Liouville*, Serret donne la formule suivante :

$$(102) \quad \ldots\ldots \quad A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+q-1}\varphi \frac{\sin(p+q)\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Or,

$$\cos^{p+q-1}\varphi \sin(p+q)\varphi = \frac{1}{2^{p+q-1}} \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{p+q-1}{k} \sin(2k+1)\varphi,$$

d'où

$$A = \frac{1}{2^{p+q-1}} \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{p+q-1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2k+1)\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi.$$

k étant fini, mais quelconque, nous avons la relation

$$(k = \text{entier}) \qquad \frac{\sin(2k+1)\varphi}{\sin\varphi} = 1 + 2\cos 2\varphi + 2\cos 4\varphi + \cdots + 2\cos 2k\varphi.$$

D'autre part, Dirichlet a démontré la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin i\beta}{\sin\beta}\, d\beta = \frac{\pi}{2}; \qquad i = \infty$$

en conséquence, nous obtenons

$$A = \frac{1}{2^{p+q-1}} \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{p+q-1}{k} = \frac{\pi}{2}.$$

La formule de Serret peut être généralisée. Si $q - p$ est *impair*, on obtient, par le même procédé,

$$(103) \quad \ldots\ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \frac{\sin(p+2m+1)\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

53. En second lieu, supposons $q - p = -2a - 1$ (a = entier). Partageons la série

$$A = \sum_{k=0}^{k=\infty} \binom{p}{k} \frac{1}{2^p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(q-p+2k)\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi,$$

en deux parties :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \frac{\sin q\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi$$

$$= -\frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{k=a} \binom{p}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(p-q-2k)\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi + \frac{1}{2^p} \sum_{k=a+1}^{k=\infty} \binom{p}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(q-p+2k)\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi,$$

$$A = -\frac{\pi}{2^{p+1}} \sum_{k=0}^{k=a} \binom{p}{k} + \frac{\pi}{2^{p+1}} \sum_{k=a+1}^{k=\infty} \binom{p}{k} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2^p} \sum_{k=0}^{k=a} \binom{p}{k},$$

$$(104) \quad \ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{q+2a+1} \frac{\sin q\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2^{q+2a+1}} \sum_{k=0}^{k=a} \binom{q+2a+1}{k}.$$

En particulier, $a = 0$:

$$(105) \quad \ldots\ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{q+1}\varphi \frac{\sin q\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2^{q+1}}.$$

54. Dans le tome VIII des *Mémoires de l'Académie des sciences d'Amsterdam,* M. Bierens de Haan considère des intégrales de la forme :

$$A = \int_0^\infty \cos^r x \, e^{q \cos px} \cos [s + q \sin px] f(x) dx.$$

Son procédé de détermination est fondé sur le développement de $\cos^r x \, e^{q \cos px} \cos [s + q \sin px]$, en série trigonométrique.

Différentions par rapport à q sous le signe intégral et faisant ensuite $q = 0$, il obtient la valeur de l'intégrale,

$$\int_0^\infty \cos^r x \cos (s + p) x \, f(x) \, dx.$$

Cette méthode ne paraît pas irréprochable. Ces développements, en série trigonométrique, ne subsistent que pour les valeurs de x comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ inclusivement. Enfin, le savant géomètre ne fait aucune restriction, quant à la forme de s; et l'exposant de $\cos x$ est simplement supposé positif.

Liège, le 5 mai 1888.

ADDITION *.

Dans ce mémoire, présenté à l'Académie des sciences de Belgique, nous avons démontré la formule

$$(1) \quad \ldots \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \sin p\varphi d\varphi = \frac{1}{2^{p+1}} \int_0^1 \frac{(1+x)^p - (1-x)^p}{x} dx.$$

Dans le tome VIII du *Journal de Liouville,* Serret trouve

$$(2) \quad \ldots \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \sin p\varphi d\varphi = \int_0^1 \frac{1-x^p}{(1-x)(1+x)^{p+1}} dx,$$

et, si p est entier,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \sin p\varphi d\varphi = \frac{1}{2^{p+1}} \left[2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^p}{p}\right].$$

Ce savant géomètre ajoute ensuite : « Cette valeur, qui n'est pas réduc-
» tible à une forme plus simple, ne donne pas lieu de croire que les inté-
» grales de l'équation (2) puissent être exprimées généralement au moyen
» des transcendantes connues. »

Nous allons montrer que, si p est commensurable, ces intégrales sont toujours exprimables par les fonctions algébriques, les fonctions logarithmiques et les fonctions circulaires.

* Présentée à la Classe des sciences, dans la séance du 3 novembre 1888.

1. Soit d'abord p positif et égal à $\frac{m}{n}$, m et n étant entiers ; cherchons l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{(1+x)^{\frac{m}{n}} - (1-x)^{\frac{m}{n}}}{x}\, dx.$$

En partageant en deux cette intégrale et en posant ensuite

$$(1+x)^{\frac{1}{n}} = z, \quad (1-x)^{\frac{1}{n}} = u,$$

on trouve

$$(3) \quad \int \frac{(1+x)^{\frac{m}{n}} - (1-x)^{\frac{m}{n}}}{x}\, dx = \frac{n}{m}(z^m - u^m) + n\int \frac{z^{m-1}}{z^n - 1}\, dz - n\int \frac{u^{m-1}}{u^n - 1}\, du$$

Si p est négatif,

$$(4) \quad . \ . \quad \int \frac{(1+x)^{-\frac{m}{n}} - (1-x)^{-\frac{m}{n}}}{x}\, dx = n\int \frac{z^{n-m-1}}{z^n - 1}\, dz - n\int \frac{u^{n-m-1}}{u^n - 1}\, du.$$

Comme p est, en valeur absolue, inférieur à l'unité, la différence $n - m - 1$ est nulle ou positive. Maintenant les intégrales, contenues dans les seconds membres des équations (3) et (4), sont exprimables par les fonctions algébriques, les fonctions logarithmiques et les fonctions circulaires.

2. Applications. — I. $m = 1$ et $n = 2$.

$$\int \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}\, dx = 2\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} + \lg \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1-x} - 1} - \lg \frac{\sqrt{1-x} + 1}{\sqrt{1-x} + 1} + \text{const.},$$

d'où

$$(5) \quad . \ . \ . \quad \int_0^1 \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}}}{x}\, dx = 2\sqrt{2} - \lg \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} + \text{constante}.$$

En conséquence,

$$(6) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\varphi}\, \sin \frac{1}{2}\varphi\, d\varphi = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \lg \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1},$$

formule qu'on vérifie aisément.



II. $m = 1$ et $n = 3$

$$\int \frac{\sqrt[3]{(1+x)}-\sqrt[3]{1-x}}{x}\,dx = 3(z-u) + 3\int\frac{dz}{z^3-1} - 3\int\frac{du}{u^3-1}.$$

Posons

$$\frac{2z+1}{\sqrt{3}} = t,$$

$$3\int\frac{dz}{z^3-1} = \int\frac{dt}{t-\sqrt{3}} - \int\frac{t+\sqrt{3}}{1+t^2}\,dt,$$

ou

$$3\int\frac{dz}{z^3-1} = \lg\left(t-\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2}\lg(1+t^2) - \sqrt{3}\,\operatorname{arctg} t + \text{constante.}$$

Ainsi

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \int\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}\,dx = {} & 3\left[\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}\right] + \lg\left[\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt[3]{1-x}-1}\right] \\ & -\frac{1}{2}\lg\left[\frac{3+\left(2\sqrt[3]{1+x}+1\right)^2}{3+\left(2\sqrt[3]{1-x}+1\right)^2}\right] - \sqrt{3}\,\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x}+1}{\sqrt{3}} \\ & + \sqrt{3}\,\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1-x}+1}{\sqrt{3}} + \text{constante.}\end{aligned}\right.$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}\,dx = 3\sqrt[3]{2} + \lg\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt{1+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}} - \sqrt{3}\,\operatorname{arctg}\frac{3}{2+\sqrt[3]{4}},$$

et

$$(8)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\cos\varphi}\,\sin\frac{1}{3}\varphi\,d\varphi = \frac{3}{2} + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\lg\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt{1+3\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}\operatorname{arctg}\frac{3}{2+\sqrt[3]{4}}.$$

III. $m = -1,\ n = 4$.

$$\int \frac{(1+x)^{-\frac{1}{4}} - (1-x)^{-\frac{1}{4}}}{x}\,dx = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,z + \lg\frac{z-1}{u-1} - 2\,\mathrm{arc\,tg}\,u - \lg\frac{z+1}{u+1} + \text{constante},$$

ou

$$\int \frac{(1+x)^{-\frac{1}{4}} - (1-x)^{-\frac{1}{4}}}{x}\,dx = \lg\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[4]{1-x}-1} - \lg\frac{\sqrt[4]{1+x}+1}{\sqrt[4]{1-x}+1}$$
$$+ 2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt[4]{1+x} - 2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt[4]{1-x} + \text{constante}.$$

Par suite,

$$(9)\ \ldots\ \int_0^1 \frac{(1+x)^{-\frac{1}{4}} - (1-x)^{-\frac{1}{4}}}{x}\,dx = \lg\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}+1} + 2\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt[4]{2},$$

et

$$(10)\ \ldots\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi\,d\varphi}{\sqrt[4]{\cos\varphi}} = \frac{1}{\sqrt[4]{8}}\lg\frac{\sqrt[4]{2}+1}{\sqrt[4]{2}-1} - \sqrt[4]{2}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt[4]{2}.$$

IV. $p = -\frac{2}{3}$.

$$\int \frac{(1+x)^{-\frac{2}{3}} - (1-x)^{-\frac{2}{3}}}{x}\,dx = 3\int\frac{dz}{z^3-1} - 3\int\frac{du}{u^3-1},$$

d'où

$$(11)\ \ldots\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{2}{3}\varphi}{\sqrt[3]{\cos^2\varphi}}\,d\varphi = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\lg\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2}-1} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}\,\mathrm{arctg}\frac{3}{2+\sqrt[3]{4}}.$$

Ajoutons, membre à membre, les équations (8) et (11), il viendra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi\sin\frac{1}{3}\varphi - \sin\frac{2}{3}\varphi}{\sqrt[3]{\cos^2\varphi}} = \frac{3}{2}.$$

3. Remarque. — En comparant les équations (1) et (2) on trouve la

relation

$$(12) \quad \ldots \quad \int_0^1 \frac{1 - x^p}{(1 - x)(1 + x)^{p+1}}\, dx = \frac{1}{2^{p+1}} \int_0^1 \frac{(1 + x)^p - (1 - x)^p}{x}\, dx.$$

Si p est commensurable, la première intégrale est exprimable, sous forme finie ; ce qui n'est pas évident, à priori.

4. Nous avons encore démontré les formules suivantes :

$$(13) \quad \ldots \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \cos(s + r)\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{s+r+1}} \cos r\frac{\pi}{2} \\ &+ \frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}} \int_0^1 \frac{(1 + x)^r(1 - x)^s - (1 - x)^r(1 + x)^s}{x}\, dx, \end{aligned} \right.$$

$$(14) \quad \ldots \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \sin(s + r)\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{s+r+1}} \sin r\frac{\pi}{2} \\ &- \frac{\cos r\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}} \int_0^1 \frac{(1 + x)^r(1 - x)^s - (1 - x)^r(1 + x)}{x}\, dx. \end{aligned} \right.$$

Si l'un des exposants s et r est entier, l'autre étant commensurable, les intégrales $A_{r,s,s+r}$ et $B_{r,s,s+r}$ sont exprimables, sous forme finie.

5. Application. — Soient $s = 1$ et $r = \frac{1}{3}$; on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin\varphi}\, \cos\varphi \cos\frac{4}{3}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4\sqrt[3]{2}} \cos\frac{\pi}{6}$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt[3]{2}} \sin\frac{\pi}{6} \left[\int_0^1 \frac{(1 + x)^{\frac{1}{3}} - (1 - x)^{\frac{1}{3}}}{x}\, dx - \int_0^1 \left[(1 + x)^{\frac{1}{3}} + (1 - x)^{\frac{1}{3}}\right] dx \right].$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin\varphi}\, \cos\varphi \sin\frac{4}{3}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4\sqrt[3]{2}} \sin\frac{\pi}{6}$$

$$- \frac{1}{4\sqrt[3]{2}} \cos\frac{\pi}{6} \left[\int_0^1 \frac{(1 + x)^{\frac{1}{3}} - (1 - x)^{\frac{1}{3}}}{x}\, dx - \int_0^1 \left[(1 + x)^{\frac{1}{3}} + (1 - x)^{\frac{1}{3}}\right] dx \right],$$

ou

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin\varphi}\cos\varphi\cos\frac{4}{3}\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{8\sqrt[3]{2}} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8\sqrt[3]{2}}\left[\lg\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}} - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{2+\sqrt[3]{4}}\right],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin\varphi}\cos\varphi\sin\frac{4}{3}\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{8\sqrt[3]{2}} - \frac{3\sqrt{3}}{16} - \frac{\sqrt{3}}{8\sqrt[3]{2}}\left[\lg\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}} - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{2+\sqrt[3]{4}}\right].$$

Liège, le 31 octobre 1888.

RECHERCHES

SUR

LES JEUNES PALMIERS

PAR

HENRI MICHEELS

DOCTEUR EN SCIENCES NATURELLES

(Mémoire présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 8 mai 1888.)



INTRODUCTION

Ce travail a pour objet de faire connaître les premiers résultats de mes recherches sur la structure des jeunes Palmiers, qu'on trouve le plus ordinairement dans les cultures du commerce horticole. Je me propose, dans cet essai, de montrer qu'on peut tirer de l'organisation de ces jeunes plantes des caractères qui permettent de les déterminer, alors que les autres moyens de détermination font défaut. Cette donnée, qui n'avait pu être obtenue jusqu'ici, a par elle-même un grand intérêt, et, dans nos centres horticoles belges, elle est certainement appelée à rendre des services. On sait, en effet, la difficulté qu'éprouvent les botanistes et les horticulteurs, même les plus exercés, quand il s'agit de déterminer, avec quelque précision, des Palmiers qui n'ont encore que leur livrée de jeunesse; cela tient à ce que le groupe des Palmiers est un groupe remarquablement homogène; tous les jeunes Palmiers se ressemblent, les quelques variantes que l'on voit de l'un à l'autre semblent surtout dépendre de l'habitat, bien plus que des rapports taxinomiques. On retrouve les mêmes variétés dans le mode de germination chez les tribus les plus différentes. De là, on le comprend, des difficultés très sérieuses, presque insurmontables, quand il s'agit de déterminer de très jeunes Palmiers. De là aussi, dans la pratique, des confusions de tous genres, sur lesquelles je ne crois pas devoir insister. Ce travail est donc une application de la méthode anatomique à la distinction d'espèces monocotylédonées, alors que des caractères morphologigues suffisants font défaut. Cette méthode

anatomique a déjà rendu de très grands services. Sans exclure, en aucune façon, les procédés en usage pour la détermination des plantes, elle peut y suppléer dans des cas comme celui dont je m'occupe. En toute circonstance, elle ajoute d'utiles indications complémentaires aux diagnoses morphologiques, lorsqu'on choisit convenablement ses caractères.

Les caractères anatomiques auxquels j'aurai recours pour distinguer les jeunes Palmiers, sont tirés :

1° De la structure de leur racine principale ;

2° De la structure de la partie libre de leur cotylédon ;

3° De la section moyenne de leurs premières feuilles gemmulaires.

En général, ces organes se retrouvent sans peine chez les très jeunes sujets ; on les retrouve même d'autant plus facilement, que les sujets sont plus jeunes et moins caractérisés morphologiquement. C'est donc précisément au moment où la détermination générique et spécifique offre le plus de difficultés au botaniste et à l'horticulteur, que ma méthode de détermination est le plus aisément applicable. En effet, malgré la grande ressemblance des jeunes Palmiers, j'ai pu relever, dans la structure des organes ci-dessus, des particularités anatomiques constantes, qui permettent de définir tous les genres que j'ai étudiés. Dans presque tous ces genres, il m'a même été possible de différencier anatomiquement les espèces. Pour un genre seulement, cette détermination spécifique n'a pu être faite. Il eût fallu recourir à de nouveaux organes ou étendre beaucoup les régions étudiées : ce qui compliquait le procédé de détermination, que je voulais laisser très simple, pour le rendre facilement accessible aux praticiens. Aucune des trois régions que j'ai considérées ne peut, à elle seule, permettre une détermination générique des Palmiers. L'homogénéité du groupe est trop grande, les variations possibles dans la structure d'organes bâtis sur un plan uniforme sont trop peu nombreuses et trop peu étendues, pour donner un nombre suffisant d'éléments de

détermination dans un groupe si nombreux. Il faut nécessairement combiner les variations de plusieurs organes, pour accroître le nombre des différences possibles. Dans les limites de mon travail, ceux que j'ai choisis suffisent pour déterminer les Palmiers que j'ai étudiés. Si, comme je l'espère, je puis étendre ces recherches à d'autres espèces, il est probable qu'il me faudra faire intervenir d'autres parties, pour obtenir un plus grand nombre de combinaisons de caractères, en rapport avec le nombre des genres et des espèces à déterminer.

Pour établir les résultats que je résume dans ce travail, j'ai dû nécessairement étudier les jeunes Palmiers dans presque toute leur étendue. Au cours de ces recherches, j'ai rencontré certaines questions d'anatomie et de morphologie, que j'ai dû résoudre pour apprécier plus exactement les rapports des parties de la jeune plante, et pour déterminer la nature des tissus rencontrés sur les sections moyennes dont j'avais à me servir. J'ai consigné quelques-uns des résultats de ces recherches générales dans cet ouvrage, me limitant toutefois à ceux qui étaient indispensables pour le sujet spécial que j'avais en vue, et renvoyant les autres à un travail ultérieur. Il ne m'était pas possible de procéder autrement, sans allonger outre mesure le mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, ou sans risquer de laisser incompréhensibles certains points importants, par lesquels mes résultats diffèrent de ceux de G. Firtsch [1], de Otto Gehrke [2], etc. Contrairement à ces deux auteurs, j'ai laissé, au second plan, les rapports que j'ai cru remarquer entre les particularités anatomiques et les conditions physiolo-

[1] FIRTSCH, G., *Anatomisch-physiologische Untersuchungen über die Keimpflanze der Dattelpalme.* SITZB. D. KAIS. AKAD. D. WISSENSCH. ZU WIEN, 1886, Bd. XCIII, I. Abth., April-Heft, pp. 342-354.

[2] GEHRKE, O., *Beiträge zur Kenntniss der Anatomie von Palmenkeimlingen.* Inaugural-Dissertation. Berlin, 1887.

giques spéciales de chaque espèce. Ces notions me semblent, en effet, beaucoup trop incomplètes encore pour procurer, aux conclusions formulées, une valeur sérieuse.

Mes recherches ont porté sur trente-trois espèces et variétés, appartenant à vingt et un genres pris dans les principales tribus des Palmiers :

Archontophœnix Alexandræ Wendl. et Dr.;
— *Cunninghamiana* Wendl. et Dr.;
Calyptronoma Levautzi;
Caryota sobolifera Wall.;
Chamærops humilis, var. *arborescens* M. et Pers.;
— — — *flexuosa;*
— — — *tomentosa;*
Cocos flexuosa M.;
Desmoncus sp.?
Dictyosperma aureum Wendl. et Dr.;
Euterpe edulis M.;
Geonoma gracilis André;
Howea Belmoreana Becc.;
— *Forsteriana* Becc.;
Hyophorbe amaricaulis M.;
— *Verschaffelti* Wendl.;
Kentia exorhiza Wendl.;
Latania Loddigesii M.;
Livistona australis M.;
— *chinensis* R. Br.;
Nephrosperma Van Houtteanum Balf.;
Phœnix canariensis;
— *dactylifera* L.;
— *farinifera* Roxb.;
— *reclinata* Jacq.;
— *spinosa* Thon.;

Pritchardia macrocarpa Lind.;
— *pacifica* Seem. et Wendl.;
Sabal Adansoni Guerns;
— *umbraculifera* M.;
Thrinax excelsa Lodd.;
Trachycarpus excelsus Wendl.;
Washingtonia filifera Wendl.

J'ai apporté un soin tout particulier à la détermination générique et spécifique des échantillons que j'ai étudiés. Cette donnée est, en effet, fondamentale pour un travail de ce genre, qui, sans cette base première, perd presque toute son utilité. Je crois être arrivé à des déterminations exactes, en me servant de tous les caractères que j'ai pu me procurer : graines, plantes plus âgées et déjà caractérisées, etc. Cette partie de mon travail m'a coûté de très grands efforts.

J'ai divisé mon travail en cinq chapitres.

Le premier contient la distinction des trois types de germination que j'ai rencontrés.

Le second est consacré à la description du type *Phœnix* et des plantes qui s'y rapportent.

Le troisième est relatif au type *Sabal* et à la description des plantes voisines.

Le quatrième comprend le type *Dictyosperma* et les plantes qui y ressemblent.

Le dernier chapitre résume les conclusions qu'on peut tirer des trois chapitres précédents.

Ces recherches ont été faites sous la haute direction de M. le professeur Bertrand, qui a mis à ma disposition les germinations de Palmiers rassem-

blées dans les collections du Laboratoire de Botanique de la Faculté des sciences de Lille. Je le prie de recevoir l'expression de ma vive gratitude, pour les matériaux qu'il a mis à ma disposition et pour les conseils qu'il m'a donnés. Je prie aussi M. le professeur Gravis, de l'Université de Liége, d'agréer mes remerciements pour les échantillons qu'il m'a procurés et pour toutes les indications que j'ai reçues de lui.

RECHERCHES

SUR

LES JEUNES PALMIERS

HISTORIQUE

Sur mon sujet spécial, la bibliographie botanique est excessivement réduite. Je ne puis guère y rattacher que trois mémoires tout récents, celui de E. Pfitzer [1], qui se borne principalement à des indications basées sur l'observation des caractères extérieurs, celui de Georg Firtsch [2], qui est une monographie spéciale du dattier, et enfin celui de Otto Gehrke [3], qui complète le travail de Firtsch, en comparant au dattier onze espèces communes.

Antérieurement, je relève quelques particularités, qui tiennent aux points que j'ai traités, dans les travaux plus généraux de Mohl [4], de Martius, de

[1] Pfitzer, E., *Ueber Früchte, Keimung und Jugendzustände einiger Palmen.* Berichte d. deutsch. botan. Gesellsch., Bd. III, 1885, Heft I, pp. 32-52.

[2] Firtsch, G., *Anatomisch-physiologische Untersuchungen über die Keimpflanze der Dattelpalme.* Sitzb. d. kais. Akad. d. Wissensch. zu Wien.

[3] Gehrke, O., *Beiträge zur Kenntniss der Anatomie von Palmenkeimlingen.*

[4] L'œuvre la plus considérable qui ait été faite sur les palmiers, est l'*Historia naturalis Palmarum* de Martius, à laquelle collaborèrent Hugo Mohl et Unger. Hugo Mohl en rédigea le premier chapitre, intitulé : *De Palmarum structurâ.* Le deuxième chapitre, *De Palmis fossilibus,* est dû à Unger, le troisième chapitre, *Genera et species palmarum,* à Martius.

Karsten [1] et aussi, quoique d'une façon incidente, dans le mémoire de Mirbel [2] sur le Cambium.

En 1831, Mohl, dans son *De structurâ palmarum,* après avoir donné la description générale de l'embryon de Palmier, d'après le *Mauritia flexuosa,* le *Phœnix dactylifera,* le *Chamærops humilis* et le *Sagus tædigera,* expose, d'une manière générale aussi, la germination des Palmiers, en prenant comme types : le *Corypha frigida* (*Brahea dulcis* M.) et le *Phœnix dactylifera.* Dans le texte, il fait connaître les transformations morphologiques de l'embryon pendant la germination, et sa structure durant cette période vitale, chez les deux Palmiers pris comme types. Cette portion du travail de Mohl, ne constitue qu'un exposé extrêmement abrégé. Les figures qui accompagnent ce texte représentent :

Une vue d'ensemble d'une germination de *Corypha frigida,* dans laquelle la seconde feuille gemmulaire, encore plissée, fait saillie hors de la gaine formée par la première [3];

Une section transversale de la gemmule de cette plante, au niveau de la partie supérieure de la première feuille et beaucoup au-dessus du point végétatif [4];

Une section radiale passant par le plan principal de son cotylédon [5];

Une section longitudinale radiale rencontrant son point végétatif [6];

Une section transversale de sa racine principale [7].

Pour le *Phœnix dactylifera,* l'auteur montre :

Une germination dans laquelle le limbe, encore plissé, de la seconde

[1] Karsten, *Die Vegetationsorgane der Palmen.* Schriften der berliner Akademie der Wissensch., 1847; voy. aussi : *Gesammelte Beiträge zur Anatomie und Physiologie der Pflanzen,* Bd. I, pp. 81-193. Berlin, 1865. (Pl. IV-XII.)

Karsten, *Die Bewurzelung der Palmen,* Linnaea, 1856.

[2] Mirbel, *Nouvelles notes sur le Cambium,* lues dans la séance du 29 avril 1839 de l'Académie des sciences de Paris.

[3] Mohl, *De Palmarum structurâ,* tab. I, fig. 1.

[4] Mohl, *Ibid.*, fig. 3.

[5] Mohl, *Ibid.*, fig. 4.

[6] Mohl, *Ibid.*, fig. 5.

[7] Mohl, *Ibid.*, fig. 12.

feuille gemmulaire fait saillie hors de la gaine, formée par la première [1];

Une section transversale du bord de cette seconde feuille, encore plissée [2];

Une section transversale d'ensemble rencontrant la première feuille gemmulaire, réduite à l'état de gaine, et le limbe de la seconde [3];

Et enfin, une section transversale de la région cylindrique du cotylédon (*petiolus cotyledonis*) du dattier [4].

Certaines de ces figures sont plus particulièrement intéressantes pour nous.

La comparaison des figures 1 et 2 montre la différence qui existe entre le mode de germination du *Corypha frigida* et celui du *Phœnix dactylifera*. Chez le premier, le cylindre cotylédonaire est inséré à la partie inférieure de la région basilaire embrassante du cotylédon (*vagina cotyledonis*); chez le second, cette région cylindrique fait suite à la région basilaire.

La figure 3 représente les divers ordres de faisceaux des deux premières feuilles gemmulaires, les croissants scléreux qui les abritent. L'auteur différencie très nettement le croissant extérieur du croissant intérieur (*annulus prosenchymatosus posterior*). La masse ligneuse et la masse libérienne sont aussi très nettement délimitées. Il en est de même des deux épidermes de la gaine. Cette figure montre, enfin, le tissu fondamental avec ses éléments plus grêles, dans sa partie externe.

La figure 10 donne les caractères histologiques des mêmes organes chez le dattier, à un niveau inférieur, et signale certaines particularités qui ne s'observaient pas sur la section précédente. C'est ainsi qu'on voit des cordons hypodermiques (*fasciculi fibrosi sub epidermide jacentes*), dans la seconde feuille gemmulaire, et des vaisseaux à diamètre prédominant, dans le bois de ses faisceaux principaux.

On remarque sur la section transversale du cylindre cotylédonaire du dattier, que reproduit la figure 13, la présence dans les faisceaux de vaisseaux à section polygonale et à diamètre étroit.

[1] Mohl, *De Palmarum structurâ*, tab. I, fig. 2.
[2] Mohl, *Ibid.*, fig. 6.
[3] Mohl, *Ibid.*, fig. 10.
[4] Mohl, *Ibid.*, fig. 13.

Martius [1] a également étudié l'embryon et la germination des Palmiers, mais en se limitant à des observations d'ordre purement morphologique. Il a pu distinguer chez ces plantes deux modes de germination, qu'il a dénommés : *germinatio admotiva* et *germinatio remotiva.*

Dans le premier, la jeune plante reste accolée à la graine dont elle est issue, dans le second, elle en est plus ou moins longuement écartée.

L'illustre botaniste de Munich a montré, de plus, qu'il y avait une distinction à établir entre les Palmiers à *germinatio remotiva,* tels que les *Phœnix* et les *Arenga* (*germinatio remotiva tubulosa*), et les Palmiers qui germent comme les *Brahea* et les *Chamaerops* (*germinatio remotiva ocreata*).

Dans son travail sur le Cambium, Mirbel donne une étude du jeune dattier, dans laquelle je relève certains résultats intéressants. C'est surtout dans les figures qui accompagnent le mémoire qu'ils sont mis en relief.

Après avoir décrit et figuré très exactement les premiers stades de la germination de cette plante, avec les principales sections radiales correspondantes, Mirbel a figuré la section moyenne de la racine principale du dattier, à différents âges.

Karsten, en 1847, consacra quelques pages à la germination des Palmiers, dans son ouvrage intitulé : *Vegetationsorgane der Palmen.* Karsten a pris comme types : l'*Iriartaea praemorsa* Kltz [3] et le *Klopstockia cerifera* Krst [4]. Il figure deux germinations de l'*Iriartaea praemorsa.* Dans la plus avancée, la première feuille normale avait étalé son limbe et la seconde feuille normale, encore plissée, commençait à sortir de l'étui formé par les premières feuilles gemmulaires, réduites à leur gaîne. Dans l'autre, la première feuille normale n'est pas encore visible. La figure relative au *Klopstockia cerifera* est donnée d'après un échantillon dont la première feuille normale étalait son limbe.

[1] Martius, *Historia naturalis Palmarum*, caput III, CLIII.
[2] Mirbel, *Nouvelles notes sur le Cambium.*
[3] *Catoblastus praemorsus* Wendl., *Oreodoxa praemorsa* Willd.
[4] *Ceroxylon Klopstockia* M.

Karsten a bien remarqué que les germinations de ces deux Palmiers différaient entre elles par l'élongation du cylindre cotylédonaire, mais il n'a pas observé la différence capitale qu'il y avait entre le *Klopstockia cerifera,* qui germe à la manière des *Sabal,* [1] et le *Phœnix dactylifera.*

L'auteur a décrit et figuré la section moyenne de la racine principale d'un jeune *Iriartaea praemorsa.* Il a donné aussi quelques indications sur la structure du cylindre cotylédonaire du dattier, d'après une section moyenne de la portion inférieure de cet organe. Il relève l'existence de lacunes dans le tissu fondamental de ce cylindre.

Plus tard [2], le même auteur, s'occupant de l'enracinement des Palmiers, distingue quatre types chez ces plantes :

1° Le type *Iriartaea,* qui se distingue des trois autres par l'allongement des premiers entre-nœuds de la jeune plante. Il se rattache au quatrième type par l'intermédiaire de l'*Iriartaea pubescens* et de l'*I. praemorsa.*

2° Le type *Copernicia,* remarquable par l'allongement de la portion libre du cotylédon de la plante en germination. Il se rapproche de la quatrième forme d'enracinement par les *Phœnix, Scheelea* et *Attalea.*

3° Le type *Sabal,* caractérisé par la croissance oblique, stoloniforme, des jeunes plantes. Par les *Elaeis,* il vient rejoindre les Palmiers à rhizomes du quatrième type.

4° Le type *Cocos,* où la jeune plante sort simplement de la portion libre du cotylédon non allongée. Elle a d'abord des entre-nœuds courts, plus tard, des entre-nœuds allongés. On peut considérer comme sous-division de ce type, les formes *Bactris,* qui possèdent un rhizome.

Dans la partie de son travail consacrée à la morphologie des jeunes Palmiers, déjà sortis de la graine, mais encore reliés à celle-ci, Pfitzer [3] ajoute les noms de trois nouvelles espèces à la liste des Palmiers, qui présentent le mode de germination désigné par Martius sous le nom de *germinatio admotiva* [4].

[1] Voy. chapitre premier.

[2] KARSTEN, *Die Bewurzelung der Palmen*, p. 608.

[3] PFITZER, *Uber Früchte, Keimung und Jugendzustände einiger Palmen.* BERICHTE D. DEUTSCH. BOTAN. GESELLSCH.

[4] *Calamus marginatus* Bl., *C. Lewisianus* Griff. et *Howea Forsteriana* Becc.

Le savant professeur de Heidelberg examine ensuite la forme qu'affecte la première feuille normale, ce qui lui permet de répartir les jeunes Palmiers, qu'il a eus à sa disposition, en diverses catégories. Il constate, cette étude faite, que la forme de la première feuille normale n'a point de rapport avec la classification et qu'elle semble n'avoir que peu de relation avec la forme définitive de la feuille adulte.

G. Firtsch [1], dans un mémoire paru en 1886, décrit les particularités anatomiques que présente la germination du dattier, et recherche leur interprétation physiologique. Cette étude du dattier est pleine d'aperçus ingénieux sur le rôle que l'on doit attribuer aux caractères histologiques de sa germination. Il y a cependant lieu de faire des réserves sur certains points.

D'après Firtsch, l'épiderme se détacherait, par lambeaux, à la partie inférieure du cylindre cotylédonaire, et l'assise cellulaire sous-jacente formerait des poils radicaux. Sur la partie supérieure de ce cylindre cotylédonaire et au niveau de son renflement, l'auteur constate l'existence de stomates. Il observe que le système mécanique de cet organe est constitué par un mince anneau scléreux, périphérique, et le fourreau scléreux des faisceaux. Il remarque que le bois de ces faisceaux est creusé d'un canal aérifère (lacune antérieure de Bertrand), et que le tissu fondamental est abondamment pourvu de canaux aérifères.

Examinant la racine principale, l'auteur écrit que le tissu d'absorption de cet organe ne possède, en général, pas de poils radicaux, que ce tissu est rapidement détruit, et que, pour cette raison, les cellules sous-jacentes se subérisent. Il constate l'existence de grandes lacunes dans ce liège interne et d'un anneau scléreux à la périphérie de l'organe.

La première feuille gemmulaire, pour Firtsch, est construite d'une manière ferme pour résister à la flexion, car elle doit servir d'organe de percement. La pointe conique de cette feuille posséderait une structure en rapport avec le rôle qu'il lui attribue. La pointe de la seconde feuille gemmulaire aurait la même structure.

[1] FIRTSCH, G., *Anatomisch-physiologische Untersuchungen über die Keimpflanze der Dattelpalme*. SITZB. D. KAIS. AKAD. D. WISSENSCH. ZU WIEN.

Il relève, enfin, dans certains organes, diverses particularités anatomiques qui indiquent, pour le dattier en germination, la nécessité d'un sol très humide.

Otto Gehrke [1] a recherché si la structure de quelques autres Palmiers en germination est la même que celle que Firtsch a observée chez le dattier, et jusqu'à quel point les particularités anatomiques constatées sont liées aux conditions climatériques. Ses recherches ont porté sur les espèces suivantes [2] :

1. *Phœnix canariensis,*
2. *Livistona chinensis* M. = *Latania borbonica* Hort.,
3. *Corypha Canna,*
4. *Oreodoxa regia,*
5. *Chamærops humilis* L.,
6. *Chamærops elegans,*
7. *Chamærops excelsa* = *Trachycarpus excelsus* Thunb.,
8. *Pritchardia filamentosa* } Seem. et Wendl.,
9. *Pritchardia filifera* } Seem. et Wendl.,
10. *Sabal umbraculifera* Adans.,
11. *Areca sapida* = *Rhopalostylis sapida* D. et W.

Elles l'ont conduit à conclure que la structure est, en principe, la même chez tous les Palmiers en germination. Les différences qu'il a pu établir entre les palmiers qu'il a examinés et le *Phœnix dactylifera,* sont de peu d'importance; elles comprennent :

1. L'absence d'espaces intercellulaires (lacune antérieure) dans le bois des faisceaux de la portion libre du cotylédon de ses Palmiers, alors qu'il en existe chez le *Phœnix dactylifera.*

2. L'existence de canaux aérifères dans le parenchyme cortical de la portion libre du cotylédon et de la racine, ainsi que dans la zone des fais-

[1] GEHRKE, O. *Beiträge zur Kenntniss der Anatomie von Palmenkeimlingen.*

[2] D'après l'auteur, il faut ajouter à la liste des palmiers à *germinatio admotiva,* l'*Oreodoxa regia,* et, à celle des palmiers à *germinatio remotiva : Phœnix canariensis, Livistona chinensis, Corypha Canna, Chamærops elegans, Trachycarpus excelsus, Pritchardia filamentosa, P. filifera* et *Sabal umbraculifera.*

ceaux du premier de ces organes chez les *Phœnix* et *Livistona*, ce qui n'est point le cas pour la plupart des autres Palmiers examinés.

3. L'apparition, chez le *Phœnix dactylifera*, autour des productions scléreuses des faisceaux de la portion libre du cotylédon, d'une gaîne protectrice qui fait défaut chez les Palmiers examinés.

4. La formation de diverses espèces d'épaississements de la gaine de la racine, où, comme termes extrêmes, on a le *Phœnix dactylifera* avec une gaine non épaissie, les *Corypha* et les *Areca*, qui ont une gaîne complète, en forme de C.

5. La présence de sclérites isolées ou de massifs scléreux, dans le parenchyme cortical de la racine des *Areca* et des *Phœnix*, ce qui n'existe pas chez les autres Palmiers.

6. La présence de poils radicaux sur la portion libre du cotylédon ainsi que sur la racine chez le *Trachycarpus excelsus* et sur la racine chez le *Corypha*, alors que chez la plupart des autres Palmiers ces poils sont éparpillés.

Certains caractères, qui permettent de considérer le jeune dattier comme une plante réclamant un sol très humide, se rencontrent chez les Palmiers examinés par Gehrke. Cet auteur en donne l'énumération.

Pour terminer, Gerhke constate que ses Palmiers appartiennent à trois des quatre types d'enracinement, créés par Karsten.

CHAPITRE PREMIER.

Types de germination.

Martius a distingué deux modes de germination chez les Palmiers [1].

La distinction établie par cet illustre botaniste n'est pas suffisante pour rendre compte des différences que l'on peut observer dans les germinations de ces plantes. Il suffit, pour s'en convaincre, d'examiner la germination d'un *Dictyosperma* (pl. I, fig. 3), d'un *Phœnix* (pl. I, fig. 1) et d'un *Sabal* (pl. I, fig. 2).

Le premier de ces Palmiers offre un exemple de *germinatio admotiva*, suivant la définition qu'en donne Marius; les deux autres, de *germinatio remotiva*.

La forme et la structure de la portion libre du cotylédon, le mode d'attache de la jeune plante à la graine, présentent, chez les deux derniers Palmiers, des variations assez considérables. A la région cotylédonaire qui enveloppe la base de la gemmule, fait suite, chez les *Phœnix*, une région cylindrique qui pénètre dans la graine. Chez les *Sabal*, cette région cylindrique s'insère près de la base de la région embrassante du cotylédon.

Les Palmiers qui montrent le genre d'attache constaté chez les *Sabal* ne diffèrent des espèces à *germinatio admotiva* que par la présence de la région cylindrique.

Il existe, par conséquent, une différence plus grande entre les espèces qui

[1] Voy. p. 12.



germent à la façon des *Phœnix* et celles qui germent comme les *Sabal*, qu'il n'en existe entre ces dernières et les Palmiers à *germinatio admotiva*.

Je crois avoir ainsi démontré que la distinction faite par Martius avait un caractère de généralité trop grand, et qu'il y a lieu de distinguer les rapports suivants, entre la jeune plante et la graine :

1° La graine ou, si l'on préfère, le suçoir est uni à la région embrassante du cotylédon par une région cylindrique qui fait suite à la première (*Phœnix*);

2° Le suçoir est uni à la base de la région cotylédonaire embrassante :

a) Par une région cylindrique (*Sabal*);
b) Directement (*Dictyosperma*).

Les nombreux Palmiers dont j'ai étudié la germination peuvent être groupés autour des trois formes prises pour exemples et qui semblent constituer des types.

J'ajouterai qu'il existe des plantes qui établissent des transitions entre les types dont j'ai fait choix, et que, chez les Palmiers examinés, toutes les espèces d'un même genre ont un mode de germination analogue.

Au début de la germination, chez les Palmiers qui appartiennent au type *Phœnix*, la portion de l'embryon qui sort de la graine affecte la forme d'un cylindre qui se termine en pointe. L'élongation de ce cylindre a pour effet de rendre verticale toute sa région inférieure, qui est comme renflée. La portion libre du cotylédon forme alors un tube, vertical dans sa partie inférieure, courbé dans sa région supérieure. La portion libre du cotylédon peut s'allonger beaucoup. La fente gemmulaire se trouve sur la face convexe de la partie infléchie. Le point végétatif de l'axe hypocotylé est au niveau du renflement.

Les feuilles extérieures de la gemmule grandissent rapidement. Elles forment un cône qui sort par la fente gemmulaire en la déchirant, chez les genres : *Phœnix, Caryota, Latania*.... Les jeunes *Chamærops, Livistona, Trachycarpus*... présentent une légère variante. Chez ceux-ci il ne se produit

point de déchirure du bord de la fente gemmulaire. Il y a un léger exhaussement du bord de cette fente le long de la gemmule (pl. II, fig. 5).

Malgré la déchirure qui s'observe au niveau de la fente gemmulaire, dans les germinations de *Phœnix, Caryota, Latania,* je ne crois pas qu'on puisse attribuer exclusivement au grand développement du système mécanique des pièces de la gemmule les perforations qui se produisent chez ces Palmiers, au moment de la sortie par la fente gemmulaire. La première feuille gemmulaire des Palmiers chez lesquels il n'y a point eu de déchirure au niveau de la fente, devrait présenter un système mécanique moins développé que chez ceux où le cotylédon possède une région déchirée; ce qui n'est point le cas [1].

Dans toutes les germinations du type *Phœnix,* la première racine, très grosse et qui jouera le rôle de racine principale, sort de la base de l'axe hypocotylé en trouant sa surface. Cette première racine est insérée profondément.

Sur les germinations plus avancées, la première racine est caractérisée comme racine principale. Des racines latérales grêles partent de la partie inférieure de l'axe hypocotylé et la gemmule est sortie par la fente gemmulaire. La partie du cotylédon qui sort de la graine montre : une région embrassante, attachée inférieurement sur l'axe hypocotylé, terminée supérieurement par un bord déchiré (chez les *Phœnix, Caryota, Latania,* pl. III, fig. 1), ou pourvue, à sa partie supérieure, d'un léger exhaussement en forme d'anneau; une région cylindrique différenciée en une partie inférieure creuse, qui fait suite à la région basilaire embrassante, et une partie supérieure pleine qui est proche du micropyle.

Dans les germinations du type *Sabal,* la portion embrassante du cotylédon se développe d'abord fort peu. L'élongation principale porte sur la partie cylindrique. Plus tard, l'orifice gemmulaire restant suffisamment grand pour que la gemmule puisse en sortir sans déchirure, il y a croissance du bord de la gaîne, de sorte que sur les germinations assez avancées, la portion cylindrique semble insérée à la base de cette gaîne, presque à sa région

[1] Voy. *Livistona australis* (pl. II, fig. 6).

d'attache, au lieu de partir, comme chez les *Phœnix*, du bord même de la gaine, là où sort la gemmule. La portion cylindrique du type *Sabal* ne présente pas de partie creuse comme chez le type *Phœnix*, et, de plus, on trouve à la base de la gaine cotylédonaire, sur la face opposée à l'insertion du cylindre cotylédonaire, un grand vide, comme si le point végétatif avait dû se redresser verticalement pour pouvoir sortir.

Lorsque la région cylindrique reste fort courte, la gaine cotylédonaire est contiguë à la graine. C'est ce que l'on rencontre chez les Palmiers du type *Dictyosperma* (pl. I, fig. 3).

CHAPITRE II.

Germinations du type Phœnix.

On doit ranger ici les genres suivants :

Caryota L.,	*Trachycarpus* Wendl.,
Phœnix L.,	*Thrinax* Sw.,
Chamærops L.,	*Latania* Commers.,
Livistona R. Br.,	*Cocos* L.

La germination de l'*Hyphœne crinita* Gaertn. (*Coccifera Thebaïca* L.), figurée par J.-F.-J. Schmidt [1], doit aussi être rapportée au type *Phœnix*.

Le genre *Phœnix* sera étudié en premier lieu; les autres genres seront examinés suivant l'ordre adopté par Bentham et Hooker [2].

Phœnix dactylifera [3].

Je prendrai comme type un jeune *P. dactylifera* dont la seconde feuille gemmulaire, déjà saillante hors de la gaîne formée par la première, montre son limbe encore plissé.

[1] SCHMIDT, *Der Keimungsprocess bei der Dumpalm*, BOTAN. CENTRALBL., 1880, p. 1662.

[2] BENTHAM et HOOKER, *Genera plantarum*.

[3] Le *P. dactylifera* L., a pour synonyme : *P. excelsior* Cav. (DE KERCHOVE DE DENTERGHEM, *Les Palmiers*, p. 252.)

Les espèces du genre *Phœnix* présentent de grandes analogies. Les autres espèces que j'ai étudiées ne se différencient du dattier que par certains caractères, qui seront énumérés pour chacune d'elles.

L'axe hypocotylé, légèrement renflé, est haut de 1 à 3^{mm}.

La région basilaire du cotylédon (pl. I, fig. 1) forme une gaine embrassante autour de la gemmule. Cette gaine est ouverte dans sa partie supérieure; il s'y est produit une large déchirure antérieurement. Le bord apparent de cette gaine se prolonge par une gouttière, fortement plissée, qui se forme et se continue par un cylindre. La portion ouverte de la gaine présente plusieurs plis profonds, qui se réunissent en un sillon unique en arrivant dans le cylindre cotylédonaire. La face externe de la gaine est parfois velue sur toute sa surface, dans sa portion élargie et dans sa partie embrassante. Le cotylédon est lisse dans sa région cylindrique [1].

La première feuille gemmulaire est réduite à sa gaine, qui est légèrement ouverte dans sa partie supérieure et non déchirée. Sur le côté du bord de cette gaine, en avant, une pointe médiaire indique le sommet de la première feuille. Cette feuille présente une quarantaine de nervures parallèles. Les cordons horizontaux, qui les relient, ne sont pas visibles par transparence. La surface de cette première feuille est dépourvue de poils.

La seconde feuille possède un limbe allongé, entier [2], plissé suivant sa longueur et terminé aussi par une pointe. Les nervures de cette feuille sont également parallèles et, à peu près, en même nombre que dans la précédente. Cette feuille présente des poils. Ces poils sont caducs; ils tombent dès que la feuille s'étale. Le pétiole n'existe pas encore, le limbe repose directement sur une gaine et celle-ci embrasse le point végétatif.

L'appareil radical ne comprend alors qu'une racine principale portant de petites radicelles sur trois rangées. Au sommet de la racine principale, on voit une coiffe nettement accusée. La racine principale est accompagnée de deux ou trois racines latérales, très grêles, insérées sur la base de l'axe hypocotylé.

[1] Dans le *Botanisches Centralblatt* (1881, vol. VIII, p. 386), le Dr J.-F.-Jul. Schmidt a signalé, cependant, chez le dattier, des poils radicaux sur la première feuille gemmulaire. Malgré mes recherches spéciales, je n'ai rien observé de semblable dans les nombreux échantillons que j'ai étudiés.

[2] On rencontre un limbe semblable chez les *P. sylvestris* Roxb., et *P. tenuis* Lodd. (PFITZER, E., *Uber Früchte, Keimung und Jugendzustände einiger Palmen*, p. 46).

Section transversale de la racine principale, vers la moitié de sa longueur.

Faisceau (pl. I, fig. 4) à onze pôles :

Lames ligneuses formant massifs cunéiformes ; vaisseaux disposés en séries radiales qui n'aboutissent pas au centre de figure ; ils vont en augmentant graduellement de diamètre de la périphérie vers le centre ; certains grands vaisseaux ont des contours arrondis, des parois couvertes de ponctuations scalariformes et sont séparés les uns des autres par des éléments plats.

Massifs grillagés comprenant chacun cinq ou six éléments grillagés ; les cellules les plus volumineuses du liber mou sont intérieures.

Fibres primitives complètement sclérifiées, allongées dans le sens du rayon, sauf, cependant, dans la partie centrale ; les fibres primitives recloisonnées, isodiamétriques, qui occupent le centre, ont des parois très épaisses[1].

Péricambium : éléments disposés sur une ou deux rangées, élargis tangentiellement. Quelques éléments péricambiaux ont des parois épaissies, les autres, des parois minces, mais on n'observe pas ici l'alternance régulière que l'on trouve dans la racine du *Chamærops humilis.*

Endoderme : épaississements en U sur les faces latérales et profondes, analogues à ceux du *Smilax.*

Liège interne : éléments à parois minces, arrondis, dont la sériation radiale reste visible ; vers l'extérieur, grandes et nombreuses lacunes étirées radialement, formées par dissociation de cellules[2] ; les cellules entrant

[1] Dans la partie basilaire, comme d'ailleurs aussi vers la pointe, les fibres primitives centrales possèdent des parois minces. La forme des éléments que l'on rencontre dans la région centrale du faisceau polyarche varie donc avec le niveau. La phrase suivante du travail de Firtsch, sur le dattier (*Anatomisch-physiologische Untersuchungen über die Keimpflanze der Dattelpalme,* p. 350), n'est donc exacte qu'en partie : « Die Mitte des Bündels » wird von einem ganz dünnen, auf dem Querschnitt nur wenigzelligen, parenchymatischen » Markstrange durchzogen. »

[2] On remarque, sur une section transversale pratiquée vers l'extrémité inférieure de cette racine, que les lacunes du liège interne sont fort réduites. Sur une telle section, les parois des grands vaisseaux ne sont pas encore épaissies.



dans les séries sont inégalement développées, ce qui tend à troubler la disposition, en séries radiales, primitive ; quelques massifs scléreux, formés par un petit nombre d'éléments, parmi lesquels il s'en trouve qui ne sont pas épaissis (ces massifs scléreux ne sont pas mentionnés dans le travail de G. Firtsch [1]).

Tissu fondam. second. : les cellules extérieures sont recloisonnées tangentiellement et radialement, en petits éléments, qui sont sclérifiés dans la zone médiane du tissu, les intérieurs et les extérieurs ont des parois minces; les régions externe et moyenne du tissu fondamental secondaire sont le siège d'un liège diffus [2].

Assise subéreuse : une rangée de grandes cellules, à parois minces, alternant avec les éléments de l'assise pilifère.

Assise pilifère : vestiges; éléments tabulaires, affaissés et dissociés.

J'ai distingué, dans la portion libre du cotylédon :

a) Une région basilaire embrassante ;

b) Une région élargie

Et *c*) une région cylindrique.

Section transversale de la région basilaire embrassante, vers la moitié de sa longueur : Anneau fermé.

Épiderme extérieur : cellules prolongées en poils, affaissées [3].

Épiderme intérieur : éléments carrés, à parois latérales et profondes, minces, à paroi extérieure légèrement épaissie.

Tissu fondamental : deux régions. Région intérieure, où sont localisés les faisceaux, et région extérieure, contiguë à l'épiderme, dans laquelle est localisé un liège diffus. Dans la région intérieure : cellules ovales, à parois minces; grandes et nombreuses lacunes disposées radialement; cellules cris-

[1] FIRTSCH, G., *Anatomisch-physiologische Untersuchungen über die Keimpflanze der Dattelpalme.*

[2] C'est à M. le professeur Bertrand que je dois la notion du liège diffus. Elle se trouve dans le cours professé par l'éminent botaniste de Lille qui, jusqu'à présent, n'a encore rien publié au sujet de ce tissu.

[3] Il n'y a donc pas de chute d'épiderme, comme le prétend Firtsch (*Anatomisch-physiologische Untersuchungen über die Keimpflanze der Dattelpalme*, p. 345).

talligènes contenant des raphides courtes. Dans la région extérieure : cellules polygonales ; vers le milieu de cette région, des éléments à parois épaissies, disposés sur une ou deux rangées, forment une couronne scléreuse fréquemment interrompue.

Faisceaux de deux ordres. Faisceau impair (médian) dans le plan de symétrie de la gemmule et en avant. — Petits faisceaux : fibres primitives entourées de cellules scléreuses. — Grands faisceaux : section circulaire ; double fourreau scléreux ; enveloppe scléreuse externe formée par des éléments ovales à parois peu épaisses ; enveloppe scléreuse interne présentant à considérer deux croissants [1] dont les éléments diffèrent peu ; ceux qui constituent le croissant extérieur sont petits, à parois fortement épaissies, à section polygonale ; la plus grande épaisseur de ce croissant est fournie par une file de trois ou quatre éléments ; les cellules que l'on rencontre dans le croissant intérieur sont légèrement plus grandes, un peu moins épaissies ; il y a deux ou trois rangées de cellules dans la plus grande épaisseur de ce croissant intérieur ; bois moins développé que le liber ; vaisseaux arrondis ; à la partie antérieure, lacune allongée radialement.

Section transversale de la région élargie du cotylédon.

Réniforme.

Faisceaux : au nombre de six ; à section ovale ; enveloppés par un double fourreau scléreux ; l'extérieur composé d'une ou deux rangées d'éléments ovales, à parois légèrement épaissies ; l'intérieur formé de petites cellules à section polygonale, à parois fortement épaissies ; on en compte quatre ou cinq rangées dans la plus grande épaisseur de ce fourreau, c'est-à-dire vis-à-vis du liber ; autour du bois, il ne s'en trouve que deux ou trois rangées ; il n'y a lieu de distinguer ni un croissant extérieur ni un croissant intérieur.

Une section transversale pratiquée vers la base du cylindre cotylédonaire ne diffère pas sensiblement de la section qui vient d'être décrite.

On observe ici la présence d'un sillon profond, dirigé suivant le plan de

[1] J'appellerai croissant extérieur celui qui est appliqué contre le liber, et croissant intérieur celui qui limite intérieurement le bois.

symétrie de l'organe, et d'une cavité intérieure. Celle-ci est ovale, centrale, et délimitée par un épiderme. Les éléments épidermiques intérieurs ont une section ovale. Leurs parois externes et latérales sont un peu épaissies. Il y a cependant des cellules qui ne sont pas sclérifiées.

Si l'on examine une section transversale pratiquée vers l'extrémité supérieure du cylindre cotylédonaire, on est frappé, tout d'abord, par l'importance des tissus sclérifiés que l'on y observe. (Pl. I. fig. 5.)

Cette section, de forme circulaire, possède de légers plis et un profond sillon médian antérieur.

Épiderme : cellules ovales ; le grand axe de l'ovale est perpendiculaire à la surface de l'organe ; cuticule très épaisse ; les cellules épidermiques sont allongées également dans le sens de la longueur de l'organe ; vues de face, leurs parois sont rectilignes ; stomates à section circulaire, à ostiole allongée suivant le diamètre vertical ; ces stomates, sur la section considérée, sont au niveau de la surface [1].

Collenchyme : trois ou quatre rangées d'éléments ovales à parois gonflées, allongés perpendiculairement à la surface de l'organe.

Tissu fondamental : cellules à parois minces, affaissées soit contre les massifs scléreux des faisceaux, soit contre le collenchyme ; un grand nombre de cellules contiennent du tanin.

Faisceaux de deux ou trois ordres définis d'après leur situation et leurs dimensions, disposés suivant deux arcs ouverts antérieurement. Arc intérieur formé par les plus grands faisceaux, qui sont au nombre de onze ; sauf le médian, ces faisceaux sont symétriques deux à deux ; le médian est situé, comme le sillon, dans le plan de symétrie. — Faisceaux de premier ordre : fourreau scléreux formé par deux croissants ; croissant extérieur composé de cellules à section polygonale, à parois légèrement épaissies et de diamètre beaucoup plus petit que celui des cellules du croissant intérieur ; les cellules

[1] Le cylindre cotylédonaire ne posséderait des stomates, d'après Firtsch (*Anatomisch-physiologische Untersuchungen über die Keimpflanze der Dattelpalme*, p. 346), que sur une zone ayant au maximum 2 millimètres de largeur. Cet auteur a constaté, de plus, que les stomates sont généralement fort élevés au-dessus de la surface de l'organe dans la partie supérieure de cette zone, et qu'ils sont au niveau de l'épiderme dans sa partie inférieure.

de ce dernier croissant ont de même des parois peu épaissies; liber en général assez réduit; bois très volumineux; parfois séparation du liber mou en deux ilots; la lacune antérieure, chez la plupart, a disparu; petits vaisseaux, à section polygonale. — Faisceaux de second et de troisième ordre : constituent l'arc extérieur; parfois réduits à des fibres primitives entourées d'une gaine scléreuse ou même simplement à cette gaine scléreuse; d'autres fois, productions libéro-ligneuses assez développées; il arrive qu'il y ait fusion entre les gaines scléreuses de deux faisceaux voisins.

Section transversale de la première feuille gemmulaire pratiquée vers la moitié de sa longueur. (Pl. I, fig. 6.)

Couronne annulaire plus épaisse dans son plan de symétrie et en avant (par rapport à l'observateur).

Faisceaux de quatre ou cinq ordres. Neuf gros faisceaux principaux sont placés dans la région médiane du tissu fondamental. Sauf le médian, ces faisceaux sont symétriques deux à deux. Ce sont les plus rapprochés du centre de figure. Ces premiers faisceaux présentent des productions ligneuses et libériennes très développées. Entre ces faisceaux et un peu en dehors, on trouve les faisceaux de la seconde série, généralement au nombre de trois entre deux faisceaux de la première série. De ces trois faisceaux, le médian est le plus gros, les deux qui l'accompagnent sont très grêles. Ces faisceaux n'existent pas sur toute l'étendue de la section. Près de la face externe de l'organe, on trouve des faisceaux, les uns plus gros, les autres très grêles. Il y a un ou deux faisceaux grêles entre deux faisceaux plus importants. Les gros faisceaux de second ordre et les faisceaux de quatrième ordre ont leurs éléments ligneux et libériens bien caractérisés, les faisceaux de troisième ordre et les faisceaux grêles de second ordre sont parfois réduits à des masses scléreuses. — Les faisceaux de premier ordre sont entièrement entourés par un fourreau scléreux, qui est formé par deux croissants dont les pointes se rejoignent à la limite du bois et du liber. Celui qui entoure le liber présente cinq ou six rangées de cellules dans sa plus grande épaisseur. Les éléments qui le constituent sont relativement petits. Ils possèdent une section polygonale à angles arrondis et offrent des parois fortement épaissies. Ceux qui composent la portion du fourreau scléreux qui

contourne le bois sont beaucoup plus grands (plus de deux fois), à section nettement polygonale et à parois bien moins épaisses. Dans la plus grande épaisseur de ce croissant, il y a sept ou huit rangées de cellules. Le bois des faisceaux principaux comprend des vaisseaux à section arrondie, à diamètre relativement petit. Ils sont séparés soit par des fibres primitives sclérifiées, à section polygonale, soit par des cellules aplaties. Les éléments ligneux ne se distinguent que très difficilement des fibres primitives sclérifiées sur une section transversale. — Les plus gros faisceaux de second ordre sont enveloppés par un fourreau scléreux qui présente les mêmes caractères que celui des faisceaux de premier ordre. Seulement, l'épaisseur du croissant appliqué contre le liber est plus grande que celle du croissant qui embrasse le bois. Ce dernier croissant n'est formé que par une ou deux rangées d'éléments. Le bois et le liber sont beaucoup réduits. On remarque que certains vaisseaux présentent une section polygonale. Les plus grêles des faisceaux de second ordre possèdent, entre le faisceau médian et les deux faisceaux de premier ordre voisins, quelques éléments libériens et ligneux caractérisés, plongés au milieu d'une masse scléreuse. Parmi les éléments ligneux, il se trouve un vaisseau relativement gros, à section polygonale ou arrondie. Entre les deux premiers faisceaux de premier ordre, les faisceaux grêles de second ordre sont réduits à des masses scléreuses. — La gaine des faisceaux de troisième ordre est surtout épaisse dans sa région postérieure. En avant, elle se réduit à une rangée d'éléments. Il se pourrait que dans ces faisceaux certains éléments scléreux appartinssent au liber. — La structure des faisceaux de quatrième ordre rappelle celle des faisceaux de troisième ordre ou celle des faisceaux grêles de second ordre, suivant qu'ils sont eux-mêmes gros ou grêles.

Nombreux *cordons scléreux* localisés dans la région moyenne et près de la face postérieure de l'organe. Les plus minces sont pleins, uniquement composés de fibres scléreuses. Les plus volumineux renferment un faisceau. Tous les faisceaux sont ainsi renfermés dans des gaines sclérifiées. On trouve toutes les transitions entre les cordons scléreux sans faisceau et les cordons qui renferment les plus gros faisceaux. Dans les minces, le faisceau n'est parfois représenté que par quelques fibres primitives.

Tissu fondamental : cellules ovoïdes à parois minces. Celles qui sont

voisines de la face postérieure sont étirées horizontalement. Il n'y a pas de cellules à raphides. Presque tous les élément sont gorgés de grains d'amidon.

Épidermes. Les éléments des deux lames épidermiques sont semblables. Ce sont des cellules étroites, allongées dans le sens de la longueur de l'organe, à section carrée, à paroi externe fortement épaissie et lisse, à parois radiales minces. Vues de face, leurs parois sont rectilignes. L'épiderme externe porte des stomates, disposés en files longitudinales. Ils sont allongés dans le sens de la longueur de la feuille. Les cellules latérales du stomate sont très grandes, bombées vers l'extérieur. Aux extrémités du grand axe du stomate vu de face, se trouvent deux cellules pentagonales. Parfois les cellules latérales sont divisées parallèlement à l'ostiole. Le stomate présente, à sa partie antérieure, une petite antichambre, limitée par deux crêtes et où arrive une arrière-chambre.

Section transversale de la seconde feuille gemmulaire vers la moitié de sa longueur.

Lame plissée à faces parallèles (Pl. I, fig. 7).

Épidermes à peu près semblables entre eux et ne différant pas sensiblement des épidermes de la première feuille gemmulaire. Les stomates sont ici plus nombreux. Les cellules épidermiques restent fort petites en face des grands faisceaux et des cordons hypodermiques. Remarquons encore que les cellules épidermiques sont moins longues que dans la première feuille gemmulaire [1].

Tissu fondamental : éléments arrondis à parois minces, dont le diamètre va en augmentant des faces de l'organe vers la région moyenne du tissu. Les petits éléments sont allongés perpendiculairement aux lames épidermiques; les grands, parallèlement. Les uns et les autres renferment des grains de chlorophylle. Les cellules qui forment le tissu de charnière, qui s'aperçoit dans les coins exposés aux déchirures, ont une section polygonale, des parois plus épaisses. Elles sont pliées presque parallèlement à la surface de l'organe et dépourvues de chlorophylle.

Faisceaux de trois ordres. Les faisceaux de premier ordre [2] sont au

[1] J'ai eu fréquemment l'occasion d'observer un recloisonnement d'épiderme à peu de distance des plis.

[2] Les faisceaux de premier ordre me paraissent homologues des faisceaux du même ordre de la première feuille gemmulaire, mais je ne puis me prononcer sur l'homologie des faisceaux de deuxième et de troisième ordre.

nombre de onze. Dix de ces faisceaux sont disposés symétriquement par rapport au plan médian. Il y a un faisceau médian. Entre deux faisceaux de premier ordre, se trouvent deux faisceaux de second ordre accompagnés généralement par deux faisceaux de troisième ordre. Ceux-ci sont parfois réduits à l'état de masses scléreuses. Ces différents faisceaux sont également distants des deux faces de l'organe et non rapprochés de la face extérieure, comme dans la première feuille gemmulaire vers le milieu de sa longueur. — Les faisceaux principaux possèdent une gaine scléreuse formée par deux croissants dont les pointes se rejoignent à la limite du bois et du liber. Le croissant extérieur est constitué par des cellules fortement épaissies. En son milieu, il comprend une file de six ou sept cellules d'épaisseur. Le croissant intérieur diffère beaucoup moins du croissant extérieur que dans les faisceaux principaux de la feuille précédente. Les cellules de la face concave de ce croissant sont plus grandes et ont des parois moins épaisses que les cellules du croissant extérieur. Le croissant intérieur compte cinq ou six rangées de cellules en son milieu. Le bois est constitué par des vaisseaux à section arrondie, à ponctuations scalariformes, séparés soit par des éléments aplatis, soit par des fibres primitives sclérifiées. Un de ces vaisseaux, généralement le plus externe, est beaucoup plus grand que les autres. Le liber présente quelques éléments grillagés. Ceux de ces éléments qui occupent la région médiane sont sclérifiés. Ce sont des fibres primitives qui se sont durcies. On trouve, de plus, des fibres primitives sclérifiées à la limite interne du liber et à la limite externe du bois. Cette disposition spéciale des éléments sclérifiés divise le liber mou en deux ilots. — Les faisceaux de second ordre sont aussi entourés par deux croissants scléreux. Le croissant extérieur est plus épais que l'intérieur. Il compte trois ou quatre rangées de cellules dans sa partie la plus épaisse. Le croissant intérieur n'a qu'une rangée d'éléments sclérifiés. Le bois et le liber possèdent les mêmes caractères que dans les faisceaux précédents. On remarque seulement qu'il n'y a pas de grand vaisseau et que les fibres primitives sclérifiées sont plus nombreuses dans la région externe du liber. — Les faisceaux de troisième ordre sont très grêles. Leur croissant extérieur est encore plus épais. Certaines cellules de la gaîne ne sont pas encore sclérifiées. Le liber et le bois de ces faisceaux sont réduits à quelques éléments étroits.

Cordons hypodermiques : éléments à section polygonale, à parois fort épaisses [1]; forment de larges plages triangulaires au dos des plis convexes et aux bords de la feuille.

Phœnix canariensis [2].

La section transversale moyenne de la première feuille rencontre le pétiole de la seconde. Ce pétiole affecte la forme d'un prisme triangulaire à angles mousses dont la face antérieure est déprimée. Dans le P. *dactylifera,* la section homologue ne montre pas de pétiole, alors même que l'échantillon a trois feuilles étalant leur limbe.

La première feuille du *P. Canariensis* est sillonnée.

Le limbe de la seconde feuille n'est pas denté sur ses bords.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à treize pôles. Lames ligneuses divisées en deux îlots; l'un, extérieur, appuyé contre le péricambium et formé par des petits vaisseaux et trachées à section ovale ou polygonale; l'autre, intérieur, constitué par un ou deux grands vaisseaux à section ovale; ces deux îlots sont séparés par trois ou quatre rangées de fibres primitives à section polygonale; l'îlot intérieur est d'ordinaire sur le rayon qui passe par l'îlot extérieur, mais parfois ces deux genres d'îlots alternent par suite de l'incurvation de la lame ligneuse à laquelle ils appartiennent. Le *Latania Loddigesii* offre les mêmes particularités [3].

Massifs libériens généralement allongés radialement.

Pericambium. Les éléments ne sont épaissis que lorsqu'ils se trouvent vis-à-vis des fibres primitives, qui séparent les lames ligneuses des massifs libériens.

[1] On remarque, sur une section transversale pratiquée vers la base de cette feuille, que les cordons hypodermiques ne sont pas épaissis. A ce niveau, le tissu de charnière est déjà différencié.

[2] Dans les germinations que j'ai étudiées, la seconde feuille gemmulaire dépassait la première de plus de 26 centimètres. Il ne m'a pas été possible d'étudier la structure de la portion libre du cotylédon, qui était flétrie.

[3] V. inf.

Tissu fondam. second. : éléments extérieurs sclérifiés.

Les sections transversales à mi-longueur de la première et de la seconde feuilles gemmulaires, varient peu, chez le genre *Phœnix,* d'une espèce à l'autre. Je m'en tiendrai donc aux descriptions que j'en donne pour le dattier. Remarquons cependant que le tissu fondamental du limbe de la seconde feuille gemmulaire ne se différencie en tissu de charnière, au voisinage des plis, que chez le *P. dactylifera.*

Phœnix farinifera [1].

Échantillons examinés, à peu près au même stade d'avancement que les *P. dactylifera* décrits.

Portion libre du cotylédon très courte (moitié moins longue que chez le dattier).

Racine principale accompagnée de deux racines latérales; radicelles sur trois ou quatre rangées.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à dix pôles. Certaines lames ligneuses sont dirigées radialement; d'autres, incurvées; toutes sont terminées intérieurement par un vaisseau ovale à diamètre prédominant, séparé du reste de la lame par des fibres primitives aplaties ou par une ou deux rangées de fibres primitives sclérifiées; on observe de grandes variations dans la longueur des lames ligneuses.

Massifs libériens très développés.

Péricambium : éléments à parois épaissies en face du liber; partout ailleurs, cellules à parois minces.

Tissu fondam. second. : siège d'un liège diffus; ne comprend que deux anneaux; l'extérieur seul est sclérifié.

Liège interne : grandes lacunes.

Le bois des faisceaux de la portion libre du cotylédon ne montre pas de lacune antérieure.

[1] Le *P. farinifera* Roxb. a pour synonymie : *P. Loureirii* Kth. et *P. pusilla* Gaertn. (De Kerchove de Denterghem, *Les Palmiers,* p. 252.)

Phœnix reclinata [1].

Exemplaires assez avancés; la troisième feuille gemmulaire avait étalé son limbe et la quatrième avait sorti le sien, encore plissé, de la gaîne formée par la première.

Une section transversale pratiquée vers le milieu de la longueur de la première feuille, ne rencontre pas le pétiole de la seconde.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à onze pôles : Lames ligneuses formant files, composées de vaisseaux à section ovale ou circulaire, terminées intérieurement par un vaisseau à diamètre prédominant, séparé du reste de la lame par une rangée de fibres primitives à parois minces ou à parois épaissies. La différence qui existe entre le diamètre du vaisseau terminal et de celui qui le précède immédiatement, n'est pas aussi grande que chez le *P. spinosa*. La longueur des lames ligneuses est assez variable. La plupart de ces lames sont dirigées radialement. Il y a moins de lames confluentes que chez le *P. spinosa*.

Pericambium : une ou deux rangées d'éléments, épaissis en face des massifs libériens.

Tissu fondam. second. : à peu près les mêmes caractères que chez le dattier.

Phœnix spinosa [2].

Les *P. spinosa* examinés étaient également dans un état de développement assez avancé. La seconde feuille gemmulaire mesurait plus de 3 décimètres et la troisième avait sorti son limbe, encore plissé, de la gaîne formée par la première.

[1] La portion libre du cotylédon était flétrie. Il ne m'a pas été possible d'étudier sa structure.

[2] Le *P. spinosa* Thonn. a pour synonymie : *Fulchironia senegalensis* Lesch., *P. leonensis* Lodd. (De Kerchove de Denterghem, *Les Palmiers*, p. 253.)

Je n'ai pu observer la structure de la portion libre du cotylédon qui était flétrie; il m'a cependant été donné de reconnaître que le cylindre cotylédonaire restait très court.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à douze pôles : Lames ligneuses à peu près d'égale longueur, généralement terminées par un grand vaisseau ovale, allongé suivant le sens du rayon, et dont le diamètre est considérablement plus grand que celui des autres éléments de la lame. Il arrive que ces lames se rejoignent deux à deux et aboutissent à un grand vaisseau. Les grands vaisseaux sont toujours séparés des lames ligneuses, auxquelles ils appartiennent, par une ou deux rangées de fibres primitives épaissies.

Massifs libériens assez allongés radialement.

Pericambium. Les éléments, disposés sur une ou deux rangées, ne sont épaissis que vis-à-vis des massifs libériens.

Liège interne : lacunes souvent très larges.

Tissu fondam. second. : peu développé; trois zones à peu près de même largeur.

Caryota sobolifera [1].

Seconde feuille gemmulaire complète. Limbe d'une forme tout à fait remarquable; une profonde échancrure médiane le divise presque entièrement en deux parties triangulaires, réunies à la partie supérieure du pétiole par un ithsme étroit, au milieu duquel se dresse un filament blanchâtre qui représente, d'après Pfitzer [2], le faisceau médian; les divisions du limbe sont des triangles scalènes; le petit côté, à peu près horizontal, est situé à la base du limbe; le grand côté est intérieur; le côté de grandeur intermédiaire est doublement denté; les nervures, très nombreuses, vont aboutir aux dents. Pétiole très allongé, à section triangulaire, à face antérieure déprimée. La gaine

1 Le *Caryota sobolifera* Wall. a pour synonymie : *C. urens* Jcq. et *Drymophlœus Zippelii?* (De Kerchove de Denterghem, *Les Palmiers*, p. 238.)

Le limbe de la seconde feuille gemmulaire était complètement étalé. A cet état de développement, la région basilaire embrassante du cotylédon était complètement ouverte dans le plan médian et en avant. Toute la portion libre du cotylédon était dans un état de flétrissure qui ne permettait point d'examiner sa structure d'une manière convenable.

2 Pfitzer (*Ueber Früchte, Keimung und Jugendzustände einiger Palmen*, p. 49) signale l'existence d'un limbe semblable chez le *C. urens* L. et le *C. furfurascea* Bl.

s'aperçoit sur les sections transversales de la première feuille; elle entoure la troisième feuille qui montre la préfoliation si compliquée des Caryota [1] :

Première feuille gemmulaire réduite à sa gaîne.

Racine principale : radicelles sur trois ou quatre rangées; parfois trois racines latérales.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à douze pôles : Lames ligneuses comprenant des vaisseaux circulaires ou ovales, à parois épaissies, alignés radialement ou à peu près, séparés par des cellules aplaties. Le vaisseau intérieur, à diamètre prédominant, peut être séparé du reste de la lame par des fibres primitives sclérifiées, comme M. O. Reinhardt [2] l'a constaté chez le *C. furfurascea.*

Massifs libériens : les éléments les plus grands sont les plus intérieurs.

Fibres primitives à parois sclérifiées; plus épaissies dans la région centrale que partout ailleurs et presque isodiamétriques; plutôt allongées radialement, entre les massifs ligneux et libériens.

Pericambium : une ou deux rangées d'éléments ovales ou tabulaires légèrement épaissis [3].

Endoderme : cellules généralement pentagonales à épaississements en U fort prononcés.

[1] C'est précisément le *C. sobolifera* qui a fourni à A. NAUMANN (*Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der Palmenblätter*, p. 239), son troisième type de plissement. La préfoliation, que j'ai observée dans la gemmule de cette plante, diffère de la préfoliation du *C. urens* L., si j'en juge par les dessins qui accompagnent le travail de EICHLER (*Zur Entwickelungsgeschichte der Palmenblätter.* ABH. DER KÖNIGL. PREUSS. AKADEMIE DER WISSENSCH. zu Berlin, 1885, pl. V, fig. 61-66).

[2] M. O. REINHARDT, *Das leitende Gewebe einiger anomal gebauten Monocotylenwurzeln. Pringsheim 's Jahrb. für wissensch. Botanik,* Bd. XVI, H. 3, p. 350.

[3] M. O. REINHARDT (*Das leitende Gewebe einiger anormal gebauten Monocotylenwurzeln. Pringsheim 's Jahrb. für wissensch. Botanik,* p. 362), qui a étudié la racine du *C. furfurascea,* a trouvé chez ce Palmier un péricambium à parois minces. Il semble en inférer que les *Caryota* présenteraient ce caractère générique. Cela ne se vérifie point pour le *C. sobolifera,* comme on vient de le voir. Remarquons, de plus, que chez ce dernier Palmier le péricambium ne possède, en certaines places, qu'une rangée de cellules, quoique REINHARDT (*l. c.* ibid.) ait écrit que les *Caryota* avaient un péricambium composé de deux assises cellulaires.

Liège interne : peu développé ; quelques petites lacunes ; faisceaux scléreux comme chez le *Phœnix dactylifera.*

Tissu fondam. second. : très large ; deux anneaux concentriques. L'intérieur est formé d'éléments à parois minces ; la plupart sont polygonaux ; les autres, arrondis, de plus grand diamètre, sont cristalligènes (raphides longues). L'extérieur, siège d'un liège diffus, se compose de cellules polygonales sclérifiées.

Assise subéreuse : cellules plus grandes ; quelques-unes sont tannifères.

Assise pilifère : grands éléments tabulaires affaissés.

Section transversale de la première feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

Anneau sillonné plus épais suivant le plan de symétrie et en avant (Pl. II, fig. 1).

Épidermes : comme chez le dattier.

Tissu fondam. : cellules ovales, à parois minces ; beaucoup de cellules sont fripées ; certaines cellules contiennent des grains d'amidon en général pyriformes ; cellules cristalligènes (raphides longues), dans le voisinage des faces de l'organe.

Faisceaux de trois ou quatre ordres. Les principaux sont enveloppés par un fourreau scléreux à deux croissants ; pas de vaisseau à diamètre prédominant. Les autres faisceaux sont des masses scléreuses entourant, ou non, des fibres primitives. Dans la partie étroite de l'anneau, tous les faisceaux, de n'importe quel ordre, sont réduits à leur enveloppe scléreuse.

La même section rencontre une seconde gaîne, très épaisse dans son plan médian et en arrière.

Faisceaux rangés, dans la partie épaisse de la gaîne, sur trois arcs qui se réunissent dans la partie étroite, où tous les faisceaux sont à l'état de masses scléreuses. — Arc extérieur, appliqué contre la face extérieure de l'organe : faisceaux de trois ordres. Les principaux possèdent un vaisseau à diamètre prédominant. Tous les faisceaux sont remarquables par le grand développement du croissant extérieur, très nettement différencié du croissant intérieur.— Arc moyen, dans la partie médiane du tissu fondamental : quatre faisceaux dont

l'orientation est singulière, placés de part et d'autre du plan médian ; les deux faisceaux les plus rapprochés du plan de symétrie de l'organe sont presque perpendiculaires à ce plan et leurs massifs libériens sont en regard ; les deux autres dirigent, au contraire, leur pointe ligneuse vers le centre de figure de l'organe ; chez ces derniers, le croissant intérieur est plus large que l'extérieur. Productions libéro-ligneuses assez développées. — Arc intérieur, appliqué contre la face intérieure de la gaine : petits faisceaux réduits à l'état de masses scléreuses présentant parfois des fibres primitives.

Dans la cavité de l'anneau, formé par la section transversale de la seconde gaîne pratiquée vers le milieu de la longueur de la première, on aperçoit le limbe de la troisième feuille, dont le tissu fondamental montre de nombreuses cellules cristalligènes (raphides longues).

Chamærops humilis var. *tomentosa.*

Même état d'avancement que les jeunes dattiers.

Les bords de la fente gemmulaire, non déchirée, subissent un léger exhaussement; plis nombreux et assez profonds, dans la portion libre du cotylédon.

Première feuille gemmulaire réduite à sa gaîne.

Limbe de la seconde feuille gemmulaire allongé, entier, terminé en pointe, plissé longitudinalement, à bords épineux ; des poils dans la région enveloppée par la gaîne cotylédonaire.

Appareil radical à peu près semblable à celui du dattier. Racines latérales grêles.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à huit pôles : Lames ligneuses à grands vaisseaux arrondis, terminées intérieurement par un vaisseau à diamètre légèrement prédominant, séparé du reste de la lame par une ou deux rangées de fibres épaissies ou par des éléments plats.

Massifs libériens à éléments grillagés peu nombreux.

Pericambium : une ou deux rangées de grands éléments tabulaires à parois minces.

Endoderme : alternance régulière d'arcs scléreux appliqués contre les massifs libériens et formés d'éléments polygonaux, à épaississements en U; — et d'arcs à éléments non épaissis, tabulaires, appliqués contre les massifs ligneux [1].

Liège interne : pas d'éléments scléreux; dans sa zone superficielle, beaucoup de cellules écrasées, surtout au voisinage du tissu fondamental secondaire sclérifié.

Tissu fondam. second., siège d'un liège diffus : deux anneaux concentriques, savoir : trois ou quatre rangées internes de cellules polygonales, peu épaissies et quatre ou cinq rangées internes de cellules polygonales fortement épaissies.

Assise subéreuse : cellules tabulaires, tannifères, à parois minces.

Assise pilifère : éléments tabulaires affaissés.

Section transversale de la région basilaire embrassante du cotylédon, vers la moitié de sa longueur.

Anneau présentant de nombreux sillons.

Épiderme extérieur : cellules à parois minces affaissées.

Épiderme intérieur : cellules rectangulaires, à parois minces, légèrement allongées tangentiellement.

Tissu fondamental : dans sa zone superficielle, siège d'un liège diffus; éléments polygonaux à parois légèrement épaissies (six ou sept rangées); dans sa zone profonde, éléments à parois minces affaissés contre le liège diffus et les faisceaux.

Faisceaux : au nombre de six; de forme arrondie; entourés par deux croissants scléreux se rejoignant à la limite du bois et du liber; les éléments du croissant intérieur ne diffèrent de ceux de l'extérieur que parce qu'ils sont un peu plus épais; petits vaisseaux à section polygonale; pas de lacune antérieure; liber très développé.

[1] Ces deux sortes d'arcs ont sensiblement la même largeur chez le *C. humilis* var. *arborescens*; chez les *C. humilis* var. *tomentosa* et *flexuosa,* les arcs scléreux sont les plus larges.
Des endodermes présentant des particularités analogues se rencontrent, d'une part, chez les *Epidendrum* et les *Philodendrum,* où les arcs scléreux sont plus larges que les arcs à parois minces; d'autre part, chez les *Dendrobium* et les *Anthurium,* où ils sont plus étroits. (Van Tieghem, *Traité de botanique,* p. 692.)

Section transversale de la région cylindrique du cotylédon, vers la moitié de sa longueur.

Polygone à angles mousses et à faces déprimées.

Faisceaux : au nombre de huit; disposés sur un arc ouvert antérieurement; enveloppés par un double fourreau scléreux; fourreau extérieur à grandes cellules ovales, à parois épaissies; fourreau intérieur : deux croissants; croissant appliqué contre le liber plus développé que celui qui protège le bois; les éléments de ce dernier croissant sont moins épaissis que ceux du premier; vaisseaux de petit diamètre à section polygonale; pas de lacune antérieure; liber très développé.

Tissu fondamental : absence de lacunes et de cavité centrale.

Section transversale de la première feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

Même forme que chez le dattier.

Épidermes : stomates, un peu différents de ceux qui ont été observés chez le dattier, à cellules latérales légèrement bombées vers l'extérieur, beaucoup plus grandes que les cellules stomatiques (Pl. II, fig. 3); aux extrémités de la fente, cellule quadrangulaire assez petite, au-dessous de laquelle s'étendent les cellules stomatiques.

Tissu fondamental : cellules ovales, dont le grand axe est parallèle aux faces de l'organe; considérablement étirées près de la face intérieure de la gaine; légèrement plissées et épaissies; dans la zone profonde, cellules gorgées d'amidon.

Faisceaux de quatre ordres. Le médian est situé dans le plan de symétrie et en avant. Les principaux sont pourvus d'un fourreau scléreux composé de deux croissants; dans certains faisceaux principaux, séparation du liber mou en deux îlots; dans d'autres, la division est incomplète; peu d'éléments grillagés; vaisseaux circulaires ou elliptiques; le plus intérieur, en général sensiblement plus grand que les autres. — Faisceaux de second ordre, quelquefois réduits à des masses scléreuses; les plus développés ne diffèrent guère des principaux les plus écartés du médian; croissant extérieur constitué par une rangée unique d'éléments scléreux. — Faisceaux de troisième ordre : masses scléreuses; leurs éléments offrent les mêmes caractères que les

cellules du croissant extérieur des faisceaux précédents. — Parfois un ou plusieurs faisceaux de quatrième ordre : masses scléreuses.

Section transversale du même organe pratiquée plus haut.

Les massifs libériens des faisceaux principaux ne contiennent plus qu'un petit nombre d'éléments à parois minces.

La sclérification du tissu fondamental a augmenté. Plus d'amidon.

Section transversale de la seconde feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

Éventail à six branches.

Épiderme intérieur : les éléments situés au fond des plis possèdent une forme pentagonale, allongée perpendiculairement à la surface de l'organe; les faces externes en regard offrent l'aspect de dents de crémaillères qui s'engrènent (Pl. II, fig. 4).

Tissu fondamental : nombreux méats, parfois assez grands; pas de tissu de charnière.

Faisceaux de trois ordres. Dans le fourreau scléreux des faisceaux principaux, il n'est guère possible d'établir une distinction entre croissant extérieur et croissant intérieur; liber séparé en deux îlots chez certains faisceaux principaux; à la limite extérieure du bois, à vaisseau circulaire, diamètre prédominant; les autres sont ovales et séparés les uns des autres par des cellules plates. — Faisceaux de deuxième ordre : réduction des précédents; un grand vaisseau circulaire. — Faisceau de troisième ordre : masses scléreuses enveloppant des fibres primitives.

Cordons hypodermiques : éléments légèrement arrondis ; à parois épaissies; formant de larges plages triangulaires aux bords de la feuille et aux extrémités des branches de l'éventail.

Chamærops humilis, var. *flexuosa.*

Aspect extérieur des germinations à peu près le même que dans la variété précédente.

Gaîne cotylédonaire relativement moins longue ; bords de la fente gemmulaire très légèrement relevés autour de la gemmule.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à neuf pôles : Lames ligneuses rayonnantes ou confluentes ; dans certaines lames, le diamètre des vaisseaux va en augmentant régulièrement de la périphérie vers le centre ; dans d'autres, il y a un groupe intérieur de trois ou quatre vaisseaux, séparé du reste de la lame par des fibres primitives minces ou sclérifiées ; groupe trachéen séparé du péricambium par une ou deux rangées de petits éléments.

Fibres primitives de grand diamètre, tabulaires; à parois minces, entre les massifs libériens et le péricambium.

Péricambium : éléments tabulaires à parois minces.

Endoderme : cellules à épaississements en U très considérables (au point que la cellule est quelquefois presque obstruée); alternance d'arcs scléreux et d'arcs à parois minces ; en certains endroits, vis-à-vis des lames ligneuses, il arrive qu'il n'y a pas d'arc à parois minces.

Liège interne : pas d'éléments écrasés, contre le tissu fondam. second. sclérifié.

Section transversale de la gaîne cotylédonaire vers la moitié de sa longueur.

Faisceaux : au nombre de huit ; section ovale ; liber très développé ; pas de lacune antérieure ; nombreux vaisseaux de petit diamètre, à section polygonale.

Section transversale de la région cylindrique du cotylédon, vers la moitié de sa longueur.

Tissu fondamental : nombreuses lacunes.

Faisceaux : liber très développé ; le bois n'est plus constitué que par quelques vaisseaux à section polygonale.

Section transversale de la première feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

Faisceaux de quatre ordres. Dans les faisceaux principaux : massif libérien très développé et vaisseau circulaire, à diamètre prédominant. — Les autres faisceaux : masses scléreuses enveloppant des fibres primitives.

Cette coupe rencontre le pétiole de la seconde feuille gemmulaire qui, sur une section transversale, est à peu près circulaire.

Chamærops humilis var. *arborescens*.

Germinations un peu plus avancées : la seconde feuille gemmulaire a étalé son limbe ; la gaîne et le cylindre cotylédonaires sont presque flétris.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à neuf pôles.

Péricambium : épaissi, en face des massifs libériens.

Endoderme : alternance d'arcs scléreux et d'arcs à parois minces, de même largeur.

Première feuille gemmulaire : faisceaux de trois ordres.

Seconde feuille gemmulaire : faisceaux de quatre ordres.

Livistona australis [1].

Région embrassante du cotylédon assez courte (sa longueur est inférieure à la moitié de la hauteur de la première feuille gemmulaire) ; bord de la fente gemmulaire légèrement exhaussé, comme chez les Chamærops (pl. II, fig. 5) ; gaîne et cylindre cotylédonaires sillonnés de plis nombreux et profonds.

Première feuille gemmulaire réduite à sa gaîne, légèrement ouverte dans sa partie supérieure.

Seconde feuille gemmulaire complète. Limbe allongé, entier, terminé en pointe [2] (étalé dans les échantillons examinés) ; nervure médiane ne se distinguant pas des autres grosses nervures. Pétiole : prisme triangulaire à arêtes mousses et à face antérieure concave. Gaine : embrasse la troisième feuille ; rencontrée par une section transversale à mi-hauteur de la gaîne cotylédonaire.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de la longueur.

Faisceau à dix pôles : Lames ligneuses courtes ; vaisseaux disposés en files

[1] Le *L. australis* M. a pour synonymie : *Corypha australis* R. B. (DE KERCHOVE DE DENDERGHEM, *Les Palmiers*, p. 250).

[2] PFITZER (*Ueber Früchte, Keimung und Jugendzustände einiger Palmen*, p. 47) signale un limbe semblable chez d'autres espèces encore : *L. altissima* Zoll., *L. Hoogendorpii* Teysm. et Binn., *L. subglobosa* M.

radiales; vaisseau intérieur à diamètre prédominant, séparé du reste du massif par une rangée d'éléments aplatis ou sclérifiés.

Massifs libériens peu développés; petit nombre d'éléments grillagés.

Fibres primitives : isodiamétriques dans la région centrale.

Péricambium : une ou deux rangées de cellules à parois minces, vis-à-vis du bois; à parois épaissies, en face du liber.

Endoderme : cellules à épaississements, n'affectant pas la forme d'un U, sur les faces profonde et latérales.

Liège interne : nombreuses lacunes; les plus grandes, étirées radialement; pas de massifs scléreux.

Tissu fondam. second. : trois anneaux. L'intérieur : cellules polygonales à parois minces. Le moyen et l'externe : éléments à section polygonale également, mais à parois épaissies; un plus grand épaississement des parois caractérise le moyen. Ce tissu est le siège d'un liège diffus.

Assise pilifère : certains éléments sont prolongés en poils.

Section transversale de la région engaînante du cotylédon, vers la moitié de sa longueur.

Anneau légèrement épaissi suivant le plan médian et en arrière; sillonné, sur sa face externe, de larges plis.

Tissu fondamental, siège d'un liège diffus : éléments sclérifiés, dans sa zone superficielle; éléments à parois minces, dans sa zone profonde, affaissés contre le liège diffus, les faisceaux et l'épiderme intérieur.

Faisceaux : au nombre de neuf; ne se distinguent entre eux que par leur forme et leur situation; ovales; allongés radialement dans la partie large de l'anneau, tangentiellement dans sa partie étroite; les divers faisceaux présentent le même degré de développement; double fourreau scléreux; l'externe comprend une ou deux rangées de cellules ovales à parois un peu épaissies; l'interne est formé par deux croissants; le croissant extérieur est plus épais que l'intérieur; les parois des éléments du premier sont plus épaisses que celles du second; nombreux vaisseaux de petit diamètre à section polygonale; liber très développé; nombreux éléments grillagés.

Epiderme extérieur : certains éléments sont prolongés en poils [1].

[1] Gerhke (*Beiträge zur Kenntniss der Anatomie von Palmenkeimlingen,* p. 26) constate

Section transversale à mi-longueur du cylindre cotylédonaire.

Octogone à angles arrondis et à faces déprimées.

Tissu fondamental : cellules à parois minces, la plupart, fripées et affaissées; nombreux éléments à section nettement arrondie et à parois légèrement épaissies, analogues à ceux que Firtsch a signalés dans le cylindre cotylédonaire du dattier [1]; le liège diffus sclérifié forme un anneau plus étroit que dans la gaine.

Faisceaux : au nombre de huit; tous au même degré de développement; tendance à se bifurquer.

Section transversale, pratiquée à mi-hauteur environ, de la première feuille gemmulaire.

Anneau légèrement aplati perpendiculairement au plan de symétrie, et dont la plus grande épaisseur se trouve dans ce plan et en avant (pl. II, fig. 6).

Tissu fondamental : éléments ovales, à parois minces, allongés radialement, dans la région médiane de la portion épaisse; partout ailleurs, éléments allongés tangentiellement; grands et nombreux méats; certaines cellules de la zone profonde de la portion épaisse sont gorgées d'amidon.

Faisceaux de six ou sept ordres. Un médian. Faisceaux de premier ordre : dans la région moyenne de tissu fondamental; ce sont les plus rapprochés du centre de figure de l'organe; ceux de second ordre, entre les précédents et un peu en dehors, n'existent qu'entre les faisceaux de premier ordre les plus rapprochés du médian. Les autres séries de faisceaux : de plus en plus rapprochés de la face extérieure. — Faisceaux de premier ordre : entourés par un fourreau scléreux; croissant extérieur à cellules polygonales fort épaissies (il y en a parfois qui pénètrent comme un coin dans le liber); cellules du croissant intérieur peu épaissies, trois ou quatre fois plus grandes que celles de l'autre croissant; le croissant intérieur est le plus épais; fibres primitives sclérifiées, à la limite du bois et du liber; gros vaisseaux arrondis

l'existence de poils radicaux sur la portion libre du cotylédon du *Chamærops excelsa* (*Trachycarpus excelsus*) et des *Corypha*.

[1] FIRTSCH, *Anatomisch-physiologische Untersuchungen über die Keimpflanze der Dattelpalme*, p. 348, fig. 7.

séparés par des éléments minces; vaisseau à diamètre prédominant; nombreux éléments grillagés. — Faisceaux de second ordre : croissant extérieur beaucoup plus épais que l'intérieur; à part cette différence, les faisceaux de second ordre ne sont que la réduction des précédents; vaisseau à diamètre prédominant. — Dans les faisceaux de troisième ordre, le croissant extérieur est plus épais que dans les faisceaux de second ordre; croissant intérieur formé par une rangée d'éléments scléreux; vaisseau à diamètre prédominant. — Faisceaux d'ordre plus élevé : souvent simples masses scléreuses, enveloppant, ou non, des fibres primitives.

Nombreux *cordons scléreux :* dans le voisinage de l'épiderme intérieur; cellules polygonales à parois moins épaissies que celles qui composent les faisceaux, réduits à des masses scléreuses, que l'on rencontre dans le voisinage de la face extérieure de l'organe.

La section transversale de la première feuille gemmulaire vers le milieu de sa longueur, montre, dans la cavité formée par l'anneau décrit, le pétiole de la seconde feuille et le limbe de la troisième (pl. II, fig. 6).

Pétiole : triangle à angles mousses et à face antérieure déprimée.

Tissu fondamental : éléments arrondis à parois minces.

Faisceaux disposés sur trois arcs ouverts antérieurement, dont les extrémités se rejoignent aux angles antérieurs. Les faisceaux de l'arc extérieur sont disposés le long des faces postérieures de l'organe. Ils sont répartis sur trois ou quatre ordres. Les faisceaux de l'arc intérieur sont alignés le long de la face antérieure de l'organe. — Faisceaux de l'arc moyen : productions libéro-ligneuses très développées; liber mou divisé en deux îlots; un ou plusieurs vaisseaux arrondis de très grand diamètre; deux croissants très nettement différenciés. — Faisceaux principaux de l'arc externe : en général fort développés; le médian appartient à cet arc, il est opposé au médian de la première feuille; fusion entre les fourreaux scléreux des faisceaux situés aux extrémités des arcs extérieur et moyen. — Faisceaux de l'arc intérieur : presque toujours réduits à l'état de masses scléreuses enveloppant des fibres primitives; vers le milieu de l'arc intérieur, faisceau qui tourne son bois vers le faisceau médian.

Limbe de la troisième feuille : nombreux cordons sclérifiés; cellules cristalligènes, au voisinage des faces de l'organe; amidon dans la plupart des cellules du tissu fondamental.

Livistona chinensis [1].

L'aspect extérieur et la structure de la racine principale, de la portion libre du cotylédon et des premières feuilles gemmulaires des germinations de *L. chinensis*, ne présentent pas, parvenues au même état d'avancement, de différences saillantes avec les jeunes *L. australis* décrits. Il n'existe point, par conséquent, à l'état considéré, de caractéristique permettant la détermination facile de ces deux espèces.

D'après A. Naumann [2], le développement des feuilles serait même essentiellement identique chez ces deux espèces. Cet auteur a trouvé que le *L. australis* ne se distingue, à ce point de vue, du *L. chinensis* que par une ligule plus longue et plus forte. Chez la première espèce, les poils qui se trouvent à l'extrémité de la ligule des jeunes feuilles, s'ajoutent à la pubescence de la pointe, tandis que, chez la seconde, on n'observerait pas cette particularité.

A l'état très jeune, où je l'ai étudié, le *L. chinensis* ne présente absolument pas d'affinité avec les *Latania*. La grande similitude de structure qui existe entre notre Palmier et le *L. australis*, légitime le rapprochement, fait par R. Brown, de ces deux plantes.

Trachycarpus excelsus [3].

La seconde feuille gemmulaire a sorti son limbe, encore plissé, de la gaine formée par la première. Limbe allongé, entier, terminé en pointe [4]. Le

[1] Le *L. chinensis* R. Br., a pour synonymie : *Latania chinensis* Jcq., *L. borbonica* Lam., *Livistona mauritiana* Wall., *Saribus chinensis* Bl. (De Kerchove de Denterghem, *Les Palmiers*, p. 250).

[2] A. Naumann, *Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der Palmenblätter*, p. 228.

[3] Le *T. excelsus* Wendl. a pour synonyme : *Chamærops* Thnbg. (De Kerchove de Denterghem, *Les Palmiers*, p. 258.) Les échantillons, mis à ma disposition, ne m'ont guère permis l'étude de la portion libre du cotylédon. Notons cependant que le bord de la fente gemmulaire est légèrement exhaussé.

[4] Il en est de même chez les *T. Fortunei* Wendl. et *Martianus* Wendl. (Pfitzer, *Ueber Früchte, Keimung und Jugendzustände einiger Palmen*, p. 47.)

pétiole est rencontré par la section transversale, pratiquée à mi-hauteur, de la première feuille gemmulaire.

Première feuille gemmulaire semblable extérieurement au même organe chez le dattier.

Racine principale assez grêle et trois ou quatre racines latérales plus grêles encore; radicelles disposées sur trois rangées.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à six pôles : Lames ligneuses très longues; vaisseau terminal à diamètre prédominant, séparé du reste de la lame soit par des éléments plats, soit par deux ou trois rangées de fibres primitives sclérifiées.

Massifs libériens assez volumineux.

Péricambium : en face du liber, éléments épaissis.

Endoderme : cellules à épaississement en U; ces épaississements sont plus accentués en face du liber que vis-à-vis du bois.

Assise pilifère : certains éléments prolongés en poils, très développés.

Section transversale de la première feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

Faisceaux de quatre ordres. Ceux de premier ordre possèdent des productions libéro-ligneuses développées, un vaisseau à diamètre légèrement prédominant.

Section transversale de la seconde feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

Faisceaux de quatre ordres. Faisceaux principaux : entourés par un fourreau scléreux composé de deux croissants bien différenciés; nombreux vaisseaux circulaires; division, nettement accusée, du liber mou en deux îlots.

Cordons scléreux : le long des lames épidermiques.

Tissu fondamental : différenciation en tissu de charnière dans le prolongement de certains plis; raphides courtes.

Thrinax excelsa [1].

Première feuille gemmulaire réduite à l'état de gaine.

Seconde feuille gemmulaire complète : Limbe allongé, entier et terminé en pointe [2]; fort épais (complètement étalé dans les échantillons examinés), à nervure médiane fort peu prédominante. Pétiole en forme de prisme triangulaire à face antérieure concave.

Le limbe de la troisième feuille gemmulaire montre un plissement en éventail, sur une section transversale, à mi-hauteur de la première feuille. Cette même section laisse encore apercevoir l'extrémité supérieure du limbe de la quatrième. A part la première, toutes les feuilles rencontrées sont velues.

Racine principale : radicelles sur deux ou trois rangées.

Région embrassante du cotylédon assez courte. La portion libre du cotylédon était dans un état de flétrissement trop avancé pour qu'il me fût possible d'étudier sa structure.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à six pôles : Certaines lames ligneuses se réunissent deux à deux ; vaisseau intérieur circulaire à diamètre prédominant, séparé du reste de la lame par des éléments plats ou sclérifiés.

Les éléments les plus volumineux du liber sont les plus intérieurs; éléments grillagés, près du péricambium.

Péricambium : une rangée de cellules tabulaires à parois en général minces ; parfois légèrement épaissies, vis-à-vis des massifs libériens.

Endoderme : cellules carrées; épaississement en U; il arrive que toutes les parois sont épaissies; en face du liber, on rencontre souvent une cellule plus petite et plus fortement épaissie.

[1] KARSTEN, *Ueber die Bewurzelung der Palmen*, p. 608, range le genre *Thrinax* parmi ceux qui offrent le mode de germination, désigné, par Martius, sous le nom de *germinatio admotiva*.

[2] PFITZER, *Ueber Früchte, Keimung und Jugendzustände einiger Palmen*, p. 47, signale un limbe de ce genre chez d'autres espèces : *T. argentea* Lodd., *T. parviflora* Sw., *T. radiata* Lodd.

Liège interne : pas d'éléments scléreux; quelques lacunes peu étendues.

Double anneau de *tissu fondam. second.* sclérifié; les éléments de l'anneau extérieur sont plus épaissis que ceux de l'anneau intérieur.

Assise pilifère : cellules tabulaires, en partie affaissées, à parois minces.

Section transversale de la première feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

Tissu fondamental : cellules ovales à parois légèrement épaissies, en partie affaissées, allongées tangentiellement, quelquefois tannifères. Dans le voisinage de la face extérieure de l'organe, on rencontre quelques éléments cristalligènes (raphides courtes).

Faisceaux de trois ordres. Faisceaux principaux : enveloppés par deux croissants qui diffèrent peu l'un de l'autre; les cellules du croissant intérieur sont un peu moins épaisses que celles du croissant extérieur; bois et liber peu volumineux. — Dans les plus gros faisceaux de deuxième et de troisième ordres : croissant extérieur à parois très épaissies; croissant intérieur très réduit.

Dans la cavité délimitée par l'anneau formé par la première feuille : gaîne de la seconde feuille, représentée par un anneau plus épais en arrière.

Tissu fondamental : éléments non épaissis; cellules cristalligènes (raphides courtes).

Faisceaux de trois ordres. Faisceaux principaux : bois et liber plus développés; pas de vaisseau à diamètre prédominant; cellules grillagées plus nombreuses. — Dans les faisceaux de second ordre : bois et liber peu différenciés. — Faisceaux de troisième ordre réduits d'ordinaire à des masses scléreuses.

Cordons scléreux : dans la région épaisse de l'anneau, près de la face intérieure.

Cette seconde gaîne entoure le limbe de la troisième et de la quatrième feuilles.



Latania Loddigesii [1].

La germination du *L. Loddigesii* présente le même caractère que celle du dattier (pl. III, fig. 1).

Première feuille gemmulaire réduite à sa gaîne.

Seconde feuille gemmulaire complète : Limbe déjà penné [2], quoique encore caché; en général, cinq lobes. Pétiole très court : prisme triangulaire à angles mousses, sillonné à sa face antérieure.

Troisième feuille gemmulaire : Limbe entier; cinq plis suivant sa longueur.

La seconde et la troisième feuilles sont velues.

Racine principale très forte; trois rangées de radicelles; coiffe très accusée; trois racines latérales.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à trente et un pôles : Lames ligneuses très inégales; elles ont une tendance à s'unir deux à deux; grands vaisseaux arrondis, non épaissis; les autres, elliptiques ou polygonaux; entre les grands vaisseaux et les petits, nombreuses rangées de fibres primitives sclérifiées divisant la lame ligneuse en deux ilots.

Massifs libériens présentant une particularité intéressante: ils se composent de deux ilots grillagés séparés par des fibres primitives [3] et situés sur

[1] Le *L. Loddigesii* M. a pour synonymie : *L. glaucophylla* Hort., *Cleophora dendriformis* Lodd. (De Kerchove de Denterghem, *Les Palmiers*, p. 249.)

Les descriptions qui suivent s'appliquent à un embryon dont la première feuille gemmulaire était seule visible extérieurement.

[2] Pfitzer, *Ueber Früchte, Keimung und Jugendzustände einiger Palmen*, p. 49, avait signalé l'existence d'un limbe penné chez le *L. Commersonii* L.

[3] Nägeli * a observé cette même disposition des massifs grillagés dans le faisceau de la racine du *Chamædorea Schiedeana;* mais l'illustre professeur bavarois l'a interprété comme une intercalation d'ilots grillagés entre les groupes trachéens et les grands vaisseaux ligneux.

P. Falkenberg ** a établi, depuis lors, que les ilots internes du *C. Schiedeana* se trouvent

* Nägeli, *Beiträge zur Wissenschaftl. Botanik.* Heft I, p. 20.

** Falkenberg, P., *Vergleichende Untersuch. über den Bau der Vegetationsorgane der Monokotyledonen.* Stuttgart, 1876, p. 96 et pl. III, fig. 7.

un même rayon ; le groupe grillagé externe est constitué par des éléments à parois plus épaisses que les fibres primitives qui l'enveloppent ; les éléments du groupe grillagé interne possèdent, au contraire, des parois plus minces que les fibres environnantes; l'un et l'autre montrent généralement un gros tube cribreux, à section arrondie, entouré par des éléments plus petits à section polygonale; l'ilot externe est le plus volumineux; les deux ilots ne renferment que peu d'éléments grillagés.

Fibres primitives à section polygonale, sauf dans la partie centrale où l'on rencontre des éléments arrondis laissant entre eux de très larges méats formant lacunes; celles qui entourent cette région centrale ont une section polygonale, des parois épaissies; cette zone, que délimite extérieurement la région des grands vaisseaux, présente des groupes de trois ou quatre éléments à parois complètement sclérifiées; les cellules de cette zone sont légèrement allongées suivant le sens du rayon; les fibres primitives, à parois minces, qui séparent les massifs libériens des massifs ligneux, ont une section polygonale; elles sont allongées radialement, surtout celles que l'on rencontre entre les ilots grillagés externes et les vaisseaux épaissis.

Péricambium : une ou deux rangées de grands éléments polygonaux, à parois minces.

Endoderme : cellules polygonales, parfois recloisonnées; leurs parois radiales seules se montrent épaissies.

Liège interne : cellules à parois minces, ovales ou arrondies; nombreux

toujours sur les rayons qui rencontrent les ilots externes. J'ai pu reconnaître qu'il en est de même pour le Palmier qui nous occupe.

L'observation de Falkenberg a été reconnue pouvoir être appliquée à diverses espèces de *Chamædorea,* au *Cocos reflexa* et au *C. flexuosa* * par M. Reinhardt **.

Notons, pour terminer, que des faits du même genre se rencontrent chez des plantes d'autres familles ***. Telles sont : *Tornelia fragrans, Pothos repens,* les *Monstera* et les *Raphidophora* de la famille des Aroïdées, *Musa rosacea* de la famille des Musacées.

* V. p. 57.

** REINHARDT, M., O., *Das leitende Gewebe einiger anormal gebauten Monokotylenwurzeln. Prinsheim's Jahrb* Bd. XVI, Heft III, p 350.

*** V. REINHARDT, M, O., *ibid.* et VAN TIEGHEM, *Sur la structure des Aroïdées.* ANN. DES SC. NAT, BOTANIQUE, sér. 5, t. VI.

méats, quelquefois très grands, dans la région médiane; nombreuses lacunes assez étendues et disposées en général suivant le sens du rayon; grains de fécule.

Double couronne de *tissu fondam. second.*, siège d'un liège diffus; les éléments de la couronne extérieure ont des parois fort épaissies; ceux de la couronne intérieure, des parois minces; quelques groupes de cette dernière couronne peuvent aussi être sclérifiés.

Assise subéreuse : une rangée de grandes cellules à parois minces alternant avec les éléments de l'assise pilifère.

Assise pilifère : une rangée de cellules tabulaires aplaties.

Section transversale pratiquée vers la moitié de la longueur de la région basilaire embrassante du cotylédon.

Anneau plus épais dans la partie antérieure du plan de symétrie.

Épiderme intérieur : éléments à section rectangulaire; paroi externe peu épaissie; faces radiales et profonde moins épaissies encore.

Tissu fondamental : Cellules les plus profondes, c'est-à-dire quatre ou cinq rangées appliquées contre l'épiderme interne, très étirées tangentiellement, à parois légèrement épaissies. Éléments de la partie médiane du tissu: parois minces, fripées; section arrondie; dans cette zone du tissu, nombreuses lacunes; le diamètre des éléments de cette zone va en augmentant des surfaces vers le milieu du tissu. La portion extérieure du tissu fondamental est le siège d'un liège diffus; trois régions : la région intérieure, formée par trois ou quatre rangées de cellules polygonales à parois épaissies; la région moyenne, comportant deux ou trois rangées de cellules polygonales à parois complètement épaissies (les éléments de la rangée externe, ou parfois même des deux rangées externes de cette région, renfermant du tanin); la région externe, constituée par deux ou trois rangées de cellules polygonales beaucoup plus grandes, à parois minces.

Faisceaux : Quinze, dont huit plus grands. Pas de faisceau médian prédominant. Le plus gros faisceau fait un angle de 45° environ avec le plan de symétrie de la gemmule. La portion élargie du cotylédon correspond à la région de la gaine où les faisceaux sont les plus faibles. Les faisceaux

sont entourés par deux croissants. Croissant extérieur : cellules à section polygonale, à parois assez épaissies; sa plus grande épaisseur est produite par une file de trois ou quatre cellules; dans la concavité de ce croissant, un élément ou deux font parfois saillie vers l'intérieur. Croissant intérieur : éléments de même dimension ou un peu plus grands que les précédents et à parois un peu moins épaissies; trois ou quatre rangées de cellules dans sa plus grande épaisseur. Liber très développé; nombreux éléments grillagés. Petits vaisseaux à section polygonale, à parois épaissies, séparés par des éléments affaissés. Le liber et le bois sont séparés par des fibres primitives sclérifiées. Fourreau scléreux entouré par une gaine, formée par des éléments ovales, à parois épaissies, portant des ponctuations. — Les faisceaux les plus grêles ne diffèrent de ceux que je viens de décrire que par la prédominance du croissant extérieur sur le croissant intérieur; les éléments du premier sont deux fois plus grands que ceux du second et ils sont aussi plus épais.

Cordons scléreux : arrondis; cellules polygonales à parois épaissies.

Épiderme externe : certains éléments se prolongent en poils.

Section transversale pratiquée dans la région élargie.

Fragment d'anneau; une déchirure a ouvert cet anneau dans sa partie antérieure; les bords de la déchirure sont cicatrisés.

Épiderme externe : la paroi externe des cellules est assez épaissie.

Faisceaux : Sauf un, beaucoup plus petit et moins développé que les autres, ne présentent guère de différences entre eux ni avec ceux de la région basilaire; fourreau scléreux formé d'éléments à parois plus épaisses; à la limite du bois et du liber, fibres primitives sclérifiées, également plus épaissies. — Le petit faisceau possède un croissant extérieur très développé; son bois et son liber sont très réduits.

Cordons scléreux : au nombre de trois; section arrondie; éléments semblables à ceux des massifs correspondants de la section précédemment décrite.

Liège diffus et *épiderme externe :* mêmes caractères que dans la région basilaire.

Section transversale du cylindre cotylédonaire vers la moitié de sa longueur.

A l'intérieur de cette section : cavité pyriforme, allongée, située suivant le plan de symétrie de l'organe et limitée par un *épiderme intérieur* dont les cellules ont leur paroi libre épaissie.

Tissu fondamental : cellules à parois minces; grands méats; le diamètre de ces cellules croît des surfaces de l'organe vers la région médiane du tissu; nombreuses lacunes, moins grandes que dans les deux autres régions.

Faisceaux : symétriques deux à deux et placés de part et d'autre du plan de symétrie; au nombre de seize; ne différant entre eux que par leur volume relatif, et des faisceaux décrits dans les autres régions de la portion libre du cotylédon, que par une plus grande épaisseur du croissant extérieur; la sclérification des éléments de ce croissant a également augmenté.

Liège diffus et *épiderme extérieur :* analogues à ceux rencontrés plus bas.

Sur divers échantillons, ces deux derniers tissus sont remplacés, en certaines places, par une sorte de tissu de renforcement, formé par de grands éléments nettement arrondis. La cavité intérieure de ces cellules est presque nulle dans la région moyenne du tissu, tant l'épaisseur de la paroi est forte. Les éléments de la zone profonde sont arrondis aussi, mais plus grands et moins épais. Ceux de la zone extérieure ne sont que légèrement épaissis.

Section transversale moyenne de la première feuille gemmulaire.

Anneau plus épais dans la partie qui regarde l'observateur (pl. III, fig. 2).

Tissu fondamental : cellules ovales à parois minces; grands et nombreux méats; grains d'amidon.

Faisceaux : Très nombreux ; de cinq ou six ordres. Les faisceaux de premier ordre, au nombre de neuf, sont entourés par deux croissants scléreux. Le croissant extérieur prend un développement considérable; chez le faisceau médian, dans sa plus grande épaisseur, c'est-à-dire suivant le rayon qui partage le faisceau en deux parties symétriques, vingt-cinq rangées d'éléments assez grands et à parois assez épaissies; une ou plusieurs rangées d'éléments épaissis sont disposés entre les pointes du croissant, de manière à séparer le

bois du liber. Les éléments du croissant intérieur sont environ deux fois plus grands que ceux du croissant extérieur; le croissant intérieur a un développement moindre que le précédent; dans sa plus grande épaisseur, chez le médian, il n'y a que sept ou huit rangées de cellules; les parois cellulaires sont moins épaisses que dans le croissant extérieur. Massifs grillagés assez restreints; nombreuses cellules grillagées et fibres lisses à parois minces. Vaisseaux dont le diamètre va en augmentant de l'extérieur vers l'intérieur de la section; les petits sont arrondis ou ovales; les grands, polygonaux; parois épaissies; fibres primitives à parois minces. — A mi-distance, entre deux faisceaux de premier ordre, se rencontre un faisceau de second ordre ne différant des précédents que par son volume moindre. — Dans les faisceaux de troisième ordre : liber et bois très réduits; chez les plus gros, croissant extérieur encore très développé. — Les faisceaux de quatrième et de cinquième ordres ne sont plus représentés que par leurs enveloppes scléreuses.

Cordons scléreux [1] : jetés sans ordre apparent, depuis la région médiane du tissu fondamental jusque dans le voisinage de l'assise épidermique intérieure; éléments polygonaux aussi, mais légèrement plus grands et à parois un peu moins épaissies que dans les faisceaux plus extérieurs.

La section transversale pratiquée vers le milieu de la première feuille gemmulaire, rencontre le limbe, déjà penné, de la seconde feuille. Elle montre, au milieu de l'anneau formé par la première feuille, cinq lames pliées en deux; la lame médiane est la plus longue.

Absence d'un *tissu de charnière.*

Faisceaux de second et de troisième ordres : assez proches de la face intérieure. Dans les faisceaux de premier ordre, le bois est constitué par des vaisseaux à section polygonale.

[1] Je crois devoir considérer ces massifs comme représentant des traces vasculaires, car, dans des cas exceptionnels, on y trouve encore des fibres primitives.

Cocos flexuosa [1].

La troisième feuille gemmulaire a presque étalé son limbe.

Les deux premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaîne; la seconde gaîne a une longueur double de la première.

Limbe de la première feuille normale : allongé, entier et surmonté par une pointe [2]; nervures parallèles, dont une médiane très forte; une section transversale à mi-longueur de la seconde gaîne montre le plissement de la troisième feuille, qui peut être rapporté au type II de A. Naumann [3]; les segments, avec leur côte médiane, sont dirigés vers le haut, caractère que présenterait, d'après Eicher [4], la préfoliation du *C. Weddelliana*. D'après cet auteur, ce caractère serait commun aussi à tous les Palmiers de la sous-famille des *Arécacées,* à l'exception des *Caryotidées.*

Racine principale : nombreuses radicelles réparties sur sept ou huit rangées verticales; quatre racines latérales grêles.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à vingt-deux pôles : Lames ligneuses comprenant des vaisseaux circulaires ou ovales; un grand nombre de lames sont confluentes deux à deux, de manière à former un angle aigu, au sommet duquel on rencontre un vaisseau à diamètre prédominant; parfois, une troisième lame est dirigée suivant la bissectrice de l'angle formé par deux lames confluentes; il arrive aussi que, dans cet angle, se montrent trois lames ligneuses; les grands vaisseaux terminaux sont séparés du reste des lames auxquelles ils appartiennent, par des fibres primitives sclérifiées.

Certains massifs libériens présentent une particularité intéressante : ils

[1] A l'âge des plantes examinées, la région basilaire embrassante du cotylédon était dans un état de flétrissement tel, qu'il m'a été impossible d'examiner sa structure.

[2] Un limbe semblable se rencontre aussi, d'après Pfitzer, *Ueber Früchte, Keimung und Jugendzustände einiger Palmen*, p. 46, chez les *C. australis* M., *C. Blumenavia* Lind., *C. Gärtneri* H. et Schm., *C. insignis* M., *C. nucifera* L., *C. plumosa* Lodd., *C. Romanzoffiana* Cham., *C. Yatai* M.

[3] A. Naumann, *Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der Palmenblätter*, p. 228, fig. 326.

[4] Eichler, *Zur Entwickelungsgeschichte der Palmenblätter*, p. 18, pl. IV, fig. 58.

sont en partie divisés par la pénétration d'une petite lame ligneuse qui s'appuie sur le péricambium; les massifs libériens situés dans l'angle formé par deux lames confluentes, sont en général plus volumineux que ceux que l'on rencontre entre deux angles [1]; dans mes échantillons, les massifs libériens étaient représentés par un seul ilot et non par deux, comme dans ceux de M. O. Reinhardt [2]; ce dispositif n'a par conséquent pas la généralité qu'on a cru devoir lui attribuer.

Péricambium : éléments de grandes dimensions, à section polygonale et à parois minces, disposés sur une seule rangée.

Endoderme : épaississements en U, sur les faces latérales et profondes des cellules.

Liège interne : quelques lacunes peu étendues; absence de massifs scléreux.

Tissu fondam. second., siège d'un liège diffus : Deux anneaux. L'anneau intérieur comprend des cellules à parois minces, à section polygonale. Dans l'extérieur, les cellules ont une section polygonale aussi, mais des parois épaissies. Toutes les cellules de ce tissu sont allongées tangentiellement.

Assise subéreuse : éléments excessivement épaissis.

Assise pilifère : éléments tabulaires.

Section transversale à mi-longueur de la région cylindrique du cotylédon.

Pas de cavité centrale.

Épiderme affaissé.

Tissu fondamental : siège d'un liège diffus, dans sa zone externe; à peu près analogue à celui du dattier; petites lacunes.

Faisceaux : une dizaine, dont la plupart en voie de division. Double fourreau scléreux; l'externe semblable à celui du dattier, dans la même région;

[1] De Bary (*Vergleichende Anatomie* ..., p. 375) indique le contraire chez le *Philodendron Imbe*. Cet auteur cite également, à ce sujet, une figure de la planche I du travail de von Mohl (*De Palm. struct.*), représentant la coupe transversale d'une racine de *Diplothemium maritimum*.

[2] Reinhardt, *Das leitende Gewebe einiger anormal gebauten Monocotylenwurzeln. Pringsheim's Jahrb.*, p. 350 et pl. XI, fig. 2.



dans le fourreau interne, le croissant intérieur est peu développé. Petits vaisseaux à section polygonale. Pas de lacune antérieure. Liber très volumineux.

Section transversale de la première feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

Tissu fondamental : cellules très légèrement sclérifiées; cellules cristalligènes à raphides courtes; en général une cellule cristalligène entre deux faisceaux; certaines cellules sont tanifères; aucune ne renferme de l'amidon.

Faisceaux de trois ou quatre ordres. Faisceaux de premier ordre : fourreau scléreux présentant ses caractères habituels; liber montrant une tendance, parfois réalisée, à se séparer en deux ilots; pas de vaisseau à diamètre prédominant; vaisseaux généralement petits, à section polygonale. — Les autres faisceaux : masses scléreuses entourant des fibres primitives non différenciés; parfois même, on ne trouve pas de fibres primitives.

L'anneau formé par une section transversale pratiquée à mi-hauteur de la seconde feuille, est plus régulier que l'anneau qui vient d'être décrit.

Les *faisceaux,* dans la seconde feuille, peuvent être répartis en trois ordres. Dans les faisceaux principaux : vaisseau à diamètre prédominant. Les faisceaux de la seconde feuille, au niveau considéré, présentent des productions libéro-ligneuses plus développées que sur la section précédente.

Tissu fondamental : cellules à parois minces; cellules cristalligènes à raphides courtes; pas de tanin.

La section transversale, à mi-hauteur, de la seconde feuille gemmulaire rencontre le limbe de la troisième.

Faisceaux de trois ou quatre ordres. Médian très gros. Dans les faisceaux principaux : vaisseau à diamètre prédominant, liber divisé en deux ilots.

Tissu fondamental : cellules cristalligènes à raphides courtes.

CHAPITRE III.

Germinations du type Sabal.

Au type *Sabal,* appartiennent les genres :

Sabal Adans.,
Washingtonia Wendl.,
Pritchardia Seem. et Wendl.

Je rappellerai que Hugo Mohl [1] a figuré, pour le *Corypha frigida* (*Brahea dulcis* M.), une germination qui peut être rapportée au type *Sabal,* et que le *Klopstockia cerifera* (*Ceroxylon Klopstockiæ* M.), d'après le dessin qu'en donne Karsten [2], aurait un mode de germination analogue.

Sabal umbraculifera [3].

Les germinations présentent leur seconde feuille pourvue d'un limbe non étalé; le pétiole n'est pas allongé; le sommet de la seconde feuille sort de la gaine formée par la première. Comme degré d'avancement, ces germinations de *S. umbraculifera* sont comparables aux jeunes *Phœnix dactylifera* décrits.

Sur la partie inférieure de la portion embrassante du cotylédon, se trouve

[1] V. p. 10.
[2] V. p. 12.
[3] *S. umbraculifera* M. a pour synonymie : *S. Blackburniana* Kirkl. et *Corypha umbraculifera* Jacq. (DE KERCHOVE DE DENTERGHEM, *Les Palmiers*, p. 255.)

inséré lecylindre cotylédonaire, couvert de poils sur ses faces postérieure et latérales ; ces poils s'étendent sur la portion de la gaîne située sous le cylindre entre ce cylindre et l'insertion de la gaîne sur l'axe hypocotylé; région embrassante fortement incurvée (pl. I, fig. 2).

Première feuille gemmulaire réduite à sa gaîne.

Seconde feuille gemmulaire: limbe allongé, entier [1] et terminé par une pointe assez forte; plis longitudinaux ; nervures parallèles, au nombre de quinze environ, dont cinq plus grosses; poils.

Racine principale : radicelles sur quatre rangées.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à neuf pôles : Lames ligneuses comprenant des vaisseaux à section polygonale ; les plus intérieurs, séparés, ou non, du reste de la lame, à parois minces; les autres, à parois épaissies, séparés par des cellules étroites aplaties entre les faces de deux vaisseaux voisins.

Massifs libériens : petit nombre d'éléments grillagés; les cellules les plus volumineuses sont au milieu des massifs.

Fibres primitives : entre ces deux genres de massifs, polygonales, pas sclérifiées; celles qui se trouvent intercalées entre le liber et le bois sont allongées radialement; les autres sont ou bien allongées tangentiellement, ou bien isodiamétriques.

Péricambium : rangée unique d'éléments non épaissis, à section polygonale.

Endoderme : cellules qui ne sont épaissies que sur les faces radiales.

Liège intérieur : cellules arrondies à parois minces (pl. III, fig. 3); cellules cristalligènes renfermant, les unes, des raphides courtes, les autres, des cristaux prismatiques d'oxalate de chaux; certaines cellules contiennent des grains de fécule.

Tissu fondam. second. : une double couronne formant un liège diffus;

[1] Pfitzer (*Uber Früchte, Keimung und Jugendzustände einiger Palmen*, p. 46) signale l'existence d'un limbe semblable chez les *S. Adansoni* Guerns., *S. mauritiiformis* Gr., *S. Palmetto* Lodd.

couronne intérieure : deux ou trois rangées de cellules polygonales à parois minces; couronne extérieure : six ou sept rangées d'éléments à section polygonale aussi, mais à parois épaissies.

Assise subéreuse : éléments à parois épaissies, plus grands que ceux du tissu fondamental secondaire.

Assise pilifère : cellules tabulaires à parois sclérifiées; l'épaisseur de la face extérieure est beaucoup plus grande que celle des faces profondes et radiales.

Une section transversale pratiquée près de la base de la racine principale, diffère notablement de la section précédente.

Faisceau : grands vaisseaux à parois épaissies.

Fibres primitives sclérifiées.

Péricambium : cellules à parois épaissies en face des massifs libériens.

Endoderme : éléments à parois plus épaisses.

Assise pilifère : outre des éléments analogues à ceux qui se rencontrent sur la section précédente, des poils allongés; les poils sont unicellulaires, très longs, semblables à ceux que l'on aperçoit sur la gaine et le cylindre cotylédonaire; ils ont l'extrémité supérieure arrondie ou simplement élargie; les cellules courtes ont la face extérieure moins épaisse.

Les radicelles sont plus nombreuses dans cette région.

Section transversale pratiquée près de l'insertion du cylindre cotylédonaire sur la gaine.

Gaine coalescente avec le cylindre cotylédonaire (pl. III, fig. 4) aplati suivant le diamètre perpendiculaire au plan de symétrie de l'organe; la gaine entoure les deux premières feuilles gemmulaires.

Faisceaux : au nombre de sept, dont trois antérieurs très petits, deux latéraux plus gros et deux postérieurs très rapprochés du plan médian, accompagnés chacun, parfois, d'une petite branche externe; les premiers faisceaux sont sensiblement plus rapprochés de la face intérieure que de la face extérieure de la gaine. Masses scléreuses grêles légèrement aplaties, enveloppant des fibres primitives; éléments scléreux généralement de forme polygonale.

Épidermes : éléments tabulaires, à parois latérales et profonde minces; à paroi extérieure assez épaissie; l'épiderme extérieur, vu de face, montre un recloisonnement de ses éléments; ceux-ci, allongés suivant le sens de la longueur de l'organe, se divisent d'abord en trois parties par des cloisons transversales; chacune de ces nouvelles cellules se recloisonne, à son tour, verticalement (pl. III, fig. 5).

Tissu fondamental : cellules à parois minces, à section arrondie, allongées tangentiellement; leur diamètre va en augmentant, mais irrégulièrement, des surfaces de l'organe vers le milieu du tissu; les deux ou trois rangées, les plus superficielles de ce tissu, sont constituées par des éléments à parois un peu épaissies, à section polygonale; elles ont un mode de formation analogue à celui d'un liège diffus; on constate l'apparition, chez certains éléments du tissu fondamental, d'une série de cloisons tangentielles accompagnées de quelques cloisons radiales.

Le cylindre cotylédonaire offre quelques différences histologiques avec la gaîne.

Épidermes : des éléments s'allongent en poils, sur les faces postérieure et latérales.

Faisceaux : productions libéro-ligneuses plus développées; fourreau scléreux plus épais. Dans les grands faisceaux : vaisseaux polygonaux d'assez petit diamètre; pas de lacune antérieure; accroissement très considérable du liber; nombreux éléments grillagés; croissant extérieur à deux rangées d'éléments assez larges, à section polygonale et à parois assez épaissies; le croissant intérieur ne comprend que quelques cellules peu épaissies (pl. III, fig. 6); — Dans les petits faisceaux : fourreau scléreux plus développé.

Tissu fondamental : certains éléments ont des parois légèrement épaissies; ce qui vient renforcer le système mécanique de l'organe.

Les sections transversales pratiquées un peu au-dessus du point d'insertion du cylindre cotylédonaire sur la gaîne, présentent quelques particularités intéressantes.

Le cylindre cotylédonaire, détaché de la gaîne, possède une section réniforme. La section transversale de la gaîne est à peu près ovoïde. Les surfaces

de séparation, en regard, sont recouvertes par une assise épidermique. Les faisceaux ont subi un léger accroissement en volume.

Vers le milieu de la longueur du cylindre cotylédonaire, la portion d'épiderme, qui recouvre les parois postérieure et latérales de cet organe, et dont certains éléments étaient allongés en poils, s'est affaissée, et les deux ou trois assises de cellules sous-jacentes ont épaissi légèrement leurs parois, comme dans le cylindre cotylédonaire du dattier.

Au-dessous du point d'insertion du cylindre cotylédonaire, et vers le milieu de la longueur de la gaîne, la section transversale est un anneau ovale, épaissi suivant le plan médian et en avant.

Épiderme extérieur : éléments à parois sclérifiées.

Faisceaux : au nombre de cinq, dont trois antérieurs et deux postérieurs. Ces derniers sont placés dans la région moyenne du tissu fondamental de la portion épaisse de l'anneau.

Section transversale de la première feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

Anneau légèrement aplati perpendiculairement au plan de symétrie.

Epidermes : analogues à ceux du dattier.

Tissu fondamental : cellules ovales à parois minces, allongées tangentiellement; ces éléments vont en augmentant de diamètre, des surfaces de l'organe vers le milieu du tissu; cellules cristalligènes, à raphides courtes.

Faisceaux : au nombre de vingt et un; répartis en trois ordres, suivant leur position et leur développement. Les faisceaux de premier ordre, ou gros faisceaux, au nombre de sept, sont situés à peu près dans la région moyenne du tissu fondamental; ils sont les plus rapprochés du centre de figure; le médian est situé dans le plan de symétrie de l'organe; les autres, symétriques deux à deux, vont en décroissant à droite et à gauche du médian. On trouve les faisceaux de second ordre entre les précédents et un peu en dehors; entre deux faisceaux principaux, on rencontre un faisceau de second ordre. Les faisceaux de troisième ordre n'existent qu'entre les premiers faisceaux principaux; ils ne sont parfois représentés que par des masses scléreuses. — Les faisceaux principaux sont enveloppés par un fourreau scléreux. Croissant

extérieur : petits éléments à section polygonale, à parois fort épaissies; on compte six ou sept rangées de cellules dans sa plus grande épaisseur. Croissant intérieur : éléments deux fois plus larges, mais moins épaissis; trois ou quatre rangées de cellules, dans sa plus grande épaisseur. Les deux croissants sont à peu près d'égal volume. Bois plus développé que le liber; de petits vaisseaux à section polygonale, allongés tangentiellement. Un petit nombre seulement d'éléments grillagés. Fibres primitives sclérifiées, entre le bois et le massif libérien qui présente une forme semi-circulaire. — Chez les faisceaux de second ordre et chez ceux de troisième ordre, qui ne sont pas réduits à l'état de masses scléreuses, le croissant extérieur est beaucoup plus volumineux que l'intérieur; à part cette différence, ces faisceaux ne semblent être qu'une réduction des précédents. Les masses scléreuses qui représentent certains faisceaux de troisième ordre, se composent d'éléments épaissis, analogues à ceux rencontrés dans les croissants extérieurs.

Section transversale de la seconde feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

Éventail à sept branches, dont la médiane est très courte, et à six plis.

Epidermes : ne diffèrent pas entre eux; les cellules épidermiques sont un peu plus petites, au contact des faisceaux et des cordons hypodermiques.

Tissu fondamental : cellules isodiamétriques à parois minces; cellules cristalligènes à raphides courtes. Au fond des plis, entre les premières et deuxièmes branches de l'éventail ainsi qu'entre les troisièmes et la médiane : tissu de charnière à cellules très allongées perpendiculairement aux éléments épidermiques et directement contigus à ceux-ci.

Faisceaux : au nombre de quinze, répartis en deux ordres définis par leur position et leur volume relatif. Les faisceaux de premier ordre sont au nombre de sept; le médian, plus gros, se trouve dans la courte branche médiane et dans le plan de symétrie de l'organe; ces faisceaux sont symétriques deux à deux et ne décroissent pas régulièrement à partir du médian; ils sont séparés les uns des autres et des bords latéraux de

la feuille, par un faisceau de second ordre. Fourreau scléreux, dans lequel on ne peut établir de distinction entre la portion antérieure et la portion postérieure, formé de grandes cellules à parois fortement épaissies et à section polygonale. Massif libérien de forme semi-circulaire ; peu d'éléments grillagés ; quelques éléments sclérifiés du fourreau appartiennent au liber. Fibres primitives sclérifiées, à la limite du liber et du bois. Vaisseaux de petit diamètre, à section polygonale, séparés par des éléments plats. — Les faisceaux de second ordre ne sont que la réduction des précédents.

Cordons hypodermiques : éléments semblables à ceux que nous avons rencontrés dans les fourreaux scléreux ; on trouve des cordons hypodermiques près des extrémités latérales de l'organe ; on en observe aussi perpendiculairement aux prolongements des divers plis.

Sabal Adansoni [1].

Le limbe de la première feuille normale, allongé, entier et terminé en pointe, est étalé.

Cylindre cotylédonaire plus court et plus grêle que chez le *S. umbraculifera ;* caractères structuraux analogues à ceux qui ont été relevés dans l'espèce précédente.

Racine principale : radicelles assez fortes, sur trois rangées.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à dix-sept pôles : Lames ligneuses très longues ; formant files, comme dans l'espèce précédente ; vaisseau intérieur à diamètre prédominant ; le nombre des vaisseaux, dans chaque lame, est assez restreint ; le grand vaisseau intérieur est ordinairement séparé des autres par plusieurs rangées d'éléments sclérifiés.

Massifs libériens assez volumineux et parfois allongés suivant le sens du rayon ; les plus grandes cellules libériennes sont généralement les plus intérieures.

[1] Le *S. Adansoni* Guerns. a pour synonymie : *Corypha minor* Jacq., *Rhapis acaulis* Willd., *Chamaerops glabra* Will., *Corypha pumila* Walt., *Chamaerops Adansoni* Mchx., *Sabal minor* Pers., *S. minima* Nutt. (De Kerchove de Denterghem, *Les Palmiers*, p. 255).

Fibres primitives sclérifiées; celles qui se trouvent dans la région centrale sont plus larges et leurs parois sont moins épaissies.

Péricambium : éléments très souvent recloisonnés; on observe fréquemment un recloisonnement tangentiel suivi d'un recloisonnement radial; section tabulaire; parois légèrement épaissies vis-à-vis des massifs grillagés.

Endoderme : cellules à section polygonale; épaississements en U sur les faces latérales et profonde.

Liège interne : certaines cellules contiennent des grains de fécule.

Tissu fondam. second., siège d'un liège diffus : double anneau; les cellules de l'anneau extérieur, sclérifié, sont allongées tangentiellement.

Assise pilifère : cellules tabulaires à paroi extérieure sclérifiée.

Section transversale de la première feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

Système mécanique assez développé.

Faisceaux de trois ordres. Les faisceaux de premier et de second ordre ont un croissant extérieur excessivement épais, à éléments plus petits et plus épaissis que ceux du croissant intérieur; ce dernier est beaucoup plus mince; liber très réduit; un vaisseau à diamètre assez considérable. — Dans les faisceaux de troisième ordre : croissant extérieur très développé; productions libéro-ligneuses plus restreintes.

Cordons scléreux, entourant parfois des fibres primitives, près de la face intérieure de la première gaine.

Section transversale de la seconde feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

Faisceaux de trois ordres. Les faisceaux principaux et de second ordre sont très allongés transversalement; leur fourreau scléreux rejoint les deux lames épidermiques; croissants peu différenciés; vaisseau à diamètre prédominant. — Dans les faisceaux de troisième ordre : croissant intérieur très épais, appliqué contre l'épiderme intérieur; croissant extérieur beaucoup plus mince.

Plages scléreuses, aux extrémités des plis de la feuille.

Tissu fondamental : pas différencié en tissu de charnière dans le prolongement des plis.

Washingtonia filifera [1].

La seconde feuille gemmulaire est visible. Son limbe, encore plissé, fait saillie hors de la gaîne formée par la première. La troisième feuille n'est pas visible extérieurement.

La région embrassante du cotylédon ne présente pas l'incurvation signalée chez les *Sabal*. L'insertion du cylindre cotylédonaire se fait comme Karsten[2] l'a figuré pour son *Klopstockia cerifera,* c'est-à-dire, perpendiculairement à la partie embrassante. Cylindre cotylédonaire beaucoup moins long que celui du *Sabal umbraculifera.*

Première feuille gemmulaire réduite à sa gaine et marquée de nombreux plis longitudinaux; environ vingt-six nervures; terminée en avant par une pointe médiane.

Seconde feuille complète : limbe allongé, entier, terminé par une pointe; cinq ou six nervures plus grosses que les autres. Une section transversale à mi-longueur de la région embrassante du cotylédon, rencontre la gaîne de cette seconde feuille gemmulaire et le limbe de la troisième feuille, dont elle montre le plissement. Ce plissement appartient au type I de A. Naumann [3]. Une section transversale pratiquée vers le milieu de la gaine formée par la première feuille, laisse apercevoir les sillons qui donnent naissance aux segments de la troisième feuille (pl. IV, fig. 1).

Racine principale portant quelques radicelles.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à dix pôles : Lames ligneuses formant files, sensiblement rayonnantes; vaisseaux à section arrondie; vaisseau intérieur à diamètre prédominant, séparé du reste de la lame par deux ou trois rangées de fibres primi-

[1] Le genre *Washingtonia* a été créé par Herm. Wendland (Bot. Zeitg., 1879, n° 68), aux dépens du genre *Pritchardia.* Antérieurement, le *W. filifera* était dénommé *Pritchardia filifera* Lind. Il avait pour syn. : *Brahea filamentosa* Hort. (De Kerchove de Denterghem, *Les Palmiers*, p. 254).

[2] Karsten, *Die Vegetationsorgane der Palmen*, pl. IV, fig. 6.

[3] Naumann, *Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der Palmenblätter*, p. 238, pl. V, fig. 32*a*.

tives sclérifiées; entre les autres vaisseaux, se rencontrent parfois aussi plusieurs rangées de fibres primitives sclérifiées.

Massifs grillagés assez volumineux, complètement enveloppés de fibres primitives sclérifiées.

Péricambium : éléments tabulaires; à parois épaissies, lorsqu'ils se trouvent en face des massifs grillagés.

Endoderme : cellules ovales; épaississements en U sur les faces latérales et profonde.

Liège interne : nombreuses lacunes; comme chez les *Sabal,* pas de massifs scléreux.

Tissu fondam. second., siège d'un liège diffus. Trois anneaux : l'intérieur est constitué par trois ou quatre rangées de cellules à parois minces; le moyen, par trois ou quatre rangées d'éléments à parois épaissies; les éléments de l'anneau externe, disposés sur deux ou trois rangées, possèdent des parois minces.

Assise pilifère : éléments tabulaires affaissés.

Section transversale de la région embrassante du cotylédon, vers la moitié de sa longueur.

Tissu fondamental : très développé; liège diffus; nombreux méats; près de la face extérieure de l'organe, les éléments du liège diffus sont légèrement épaissis; les cellules du tissu fondamental contiguës à cet anneau de liège diffus sont fripées; cellules tannifères et cellules cristalligènes à raphides courtes.

Faisceaux : section ovale; au nombre de quatre, dont un médian; fourreau scléreux; pas de lacune antérieure; liber très volumineux.

Section transversale de la première feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

Anneau plus épais en avant (pl. IV, fig. 1).

Tissu fondamental : éléments généralement affaissés contre les épidermes et les faisceaux; cellules cristalligènes (raphides courtes); tanin; absence d'amidon.

Faisceaux de trois ordres. Faisceaux de premier ordre : croissants

présentant leurs caractères histologiques habituels; le croissant extérieur est plus épais que l'intérieur; quelques faisceaux de premier ordre montrent un vaisseau circulaire à diamètre prédominant. — Faisceaux de second ordre : tendance à se diviser; croissant extérieur aussi épais que chez les précédents; croissant intérieur réduit à une ou deux rangées d'éléments scléreux. — Faisceaux de troisième ordre : simples masses scléreuses possédant parfois dans leur intérieur des fibres primitives.

La section transversale à mi-hauteur de la première feuille gemmulaire rencontre la seconde feuille. Cette lame présente sur sa face intérieure des sillons très profonds (pl. IV, fig. 1).

Faisceaux peu nombreux, répartis en deux ordres; ils ont presque tous des productions libéro-ligneuses très développées; faisceau médian, près de la face extérieure de l'organe; les deux faisceaux principaux placés de part et d'autre de ce médian sont, au contraire, plus proches de la face intérieure que de la face extérieure; les autres faisceaux principaux se trouvent dans la région moyenne du tissu fondamental; le croissant extérieur du médian est plus épais que l'intérieur; c'est le contraire qui a lieu dans les deux faisceaux principaux placés de part et d'autre du médian; dans ces faisceaux, le croissant intérieur atteint une épaisseur très considérable; croissants extérieur et intérieur à peu près de même épaisseur, chez les autres faisceaux principaux; quelques faisceaux principaux montrent un liber mou divisé en deux îlots; chez tous, vaisseau à section circulaire et à diamètre prédominant. — Les faisceaux de second ordre ne sont que la réduction des précédents; parfois, vaisseau à diamètre prédominant.

Vers le milieu de sa longueur, ce limbe a un système mécanique différent.

Les *faisceaux* sont moins développés.

Des *cordons hypodermiques* se caractérisent près des lames épidermiques.

Pritchardia pacifica [1].

Les deux premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaine. La troisième a étalé son limbe allongé, entier et terminé en pointe [2], mais son pétiole n'est pas encore sorti de l'étui formé par les deux premières. La quatrième feuille montre le sommet de son limbe encore plissé.

Cylindre cotylédonaire très court, inséré perpendiculairement sur la région embrassante (pl. IV, fig. 2).

Racine principale rapidement flétrie; racines secondaires; radicelles peu nombreuses.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à onze pôles : Lames ligneuses formant files, terminées intérieurement par un vaisseau à section circulaire et à diamètre très considérable, séparé des autres par des fibres primitives sclérifiées; six lames ligneuses se réunissent deux à deux, formant des angles au sommet desquels on rencontre un grand vaisseau.

Massifs libériens enveloppés par des fibres primitives sclérifiées.

Fibres primitives sclérifiées ; celles qui se trouvent dans la région centrale sont les plus grandes.

Péricambium : éléments tabulaires ; des parois épaissies, en face des massifs libériens.

Endoderme : cellules ovales à épaississements en U sur les faces latérales et profonde.

Liège interne : petites lacunes.

Tissu fondam. second., siège d'un liège diffus. Trois anneaux : l'intérieur est formé par cinq ou six rangées de cellules à parois minces; l'extérieur,

[1] Le *P. pacifica* Seem. et Wendl. a pour synonymie : *Corypha umbraculifera* Forster. (De Kerchove de Denterghem, *Les Palmiers*, p. 254).

La structure de la portion libre du cotylédon n'a pu être étudiée dans les *Pritchardia* examinés.

[2] Pfitzer (*Ueber Früchte, Keimung und Jugendzustände einiger Palmen*, p. 47) signale l'existence d'un limbe semblable chez les : *P. aurea* Lind., *P. Gaudichaudi* Wendl., *P. macrocarpa* Lind., *P. Martii* Wendl., *P. pericularum* Wendl., *P. Vuylstekeana* Wendl.

par trois ou quatre rangées d'éléments sclérifiés; le moyen, par six ou sept rangées d'éléments à parois minces.

Assise pilifère : certains éléments sont allongés.

Section transversale de la première feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

Anneau régulier.

Tissu fondamental : cellules légèrement épaissies; cellules cristalligènes à raphides courtes.

Faisceaux de trois ou quatre ordres. Faisceaux de premier ordre : les plus rapprochés du centre de figure de l'organe sont tous également distants de l'épiderme intérieur; croissant extérieur de même épaisseur que le croissant intérieur; pas de vaisseau à diamètre prédominant; liber mou non divisé en deux ilots. — Faisceaux de second ordre : masses scléreuses enveloppant quelques fibres primitives. — Faisceaux de troisième et de quatrième ordre : simples masses scléreuses.

Pas de *cordons hypodermiques.*

Dans la cavité de cette gaîne, on rencontre la seconde feuille gemmulaire qui, au niveau considéré, présente la forme d'un anneau régulier.

Faisceaux de quatre ordres. Faisceaux principaux : les deux croissants sont de même épaisseur; un vaisseau à diamètre prédominant. — Faisceaux de second ordre : croissant extérieur plus épais que l'intérieur; pas de vaisseau à diamètre prédominant. — Faisceaux de troisième et de quatrième ordre : masses scléreuses enveloppant, ou non, des fibres primitives.

Tissu fondamental : cellules cristalligènes à raphides courtes.

La section transversale à mi-hauteur de la première feuille gemmulaire rencontre, de plus, la gaîne de la troisième feuille et le limbe de la quatrième. Ces organes, recouverts de longs poils, possèdent aussi des cellules cristalligènes à raphides courtes. Le plissement offert par la quatrième feuille peut être rapporté au type I de A. Naumann [1].

Section transversale de la seconde feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

[1] NAUMANN, *Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der Palmenblätter*, p. 238, pl. V., fig. 32*a*.



Tissu fondamental : éléments tannifères; pas d'amidon; cellules cristalligènes à raphides courtes.

Faisceaux de quatre ordres. Le médian est accolé contre l'épiderme extérieur. Faisceaux principaux : croissant extérieur plus large, mais moins épais, que l'intérieur; vaisseau à diamètre légèrement prédominant. — Faisceaux de second ordre : croissant extérieur plus épais que l'intérieur, qui est souvent même réduit à une rangée unique d'éléments scléreux. — Faisceaux de troisième et de quatrième ordre : masses scléreuses avec traces vasculaires.

Pas de *cordons scléreux.*

La section considérée rencontre la base du limbe de la troisième feuille gemmulaire et le milieu du limbe de la quatrième.

Limbe de la troisième feuille : *cordons scléreux;* croissant intérieur des *faisceaux* principaux beaucoup plus épais que l'extérieur.

Limbe de la quatrième feuille : croissant extérieur des *faisceaux* principaux plus épais que l'intérieur.

Dans ces deux limbes, pas de *tissu de charnière.*

Pritchardia macrocarpa.

Région cylindrique cotylédonaire excessivement réduite. Échantillons déjà assez avancés [1] : la quatrième feuille gemmulaire avait étalé son limbe.

Les deux premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaîne, la troisième, formant une sorte de spathe assez épaisse, est couverte extérieurement de poils protégeant la gemmule (pl. IV, fig. 3).

Limbe de la première feuille normale : allongé, entier, terminé en pointe. Pétiole : très allongé, section triangulaire à angles mousses et à face antérieure profondément déprimée; se prolonge inférieurement en gaîne.

Racine principale et nombreuses racines latérales, assez fortes, couvertes de radicelles.

[1] Ce qui ne m'a pas permis d'examiner la structure de la portion libre du cotylédon.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à vingt et un pôles. Presque toutes les lames ligneuses sont rayonnantes; elles sont toutes terminées intérieurement par un vaisseau à diamètre prédominant, séparé du reste de la lame par une rangée d'éléments plats ou sclérifiés.

Massifs libériens ovales, allongés, enveloppés par des fibres primitives sclérifiées.

Péricambium : en face des massifs libériens, éléments sclérifiés; les autres cellules conservent des parois minces.

Endoderme : cellules présentant des épaississements en U.

Liège interne : pas de massifs scléreux.

Tissu fondam. second., siège d'un liège diffus. Comme dans l'espèce précédente, trois anneaux. Nombreuses cellules cristalligènes à raphides courtes.

Assise pilifère complètement affaissée.

Section transversale de la première feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

Anneau régulier.

Le tissu fondamental présente une particularité intéressante. Les cellules contiguës au croissant extérieur des faisceaux ont, sur une section transversale, une forme à peu près rectangulaire. Sur une telle section, elles sont allongées perpendiculairement à la surface de ce croissant. Souvent, de petites cellules ovales séparent ces grands éléments du croissant.

Faisceaux de quatre ordres. Faisceaux principaux : croissant intérieur un peu plus épais que l'extérieur; vaisseau à diamètre légèrement prédominant. — Croissant extérieur plus épais que le croissant intérieur, dans les faisceaux de second ordre. — Faisceaux de troisième et de quatrième ordre : masses scléreuses enveloppant des fibres primitives non différenciées.

Cordons scléreux, le long du bord intérieur de l'organe.



Section tranversale de la seconde feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

Le *tissu fondamental* ne possède pas ici la particularité relevée dans la feuille précédente.

Faisceaux de quatre ordres. Faisceaux principaux : généralement un vaisseau à diamètre prédominant; séparation du liber mou en deux ilôts. — Les faisceaux de second ordre ne sont que la réduction des précédents. — Les faisceaux de troisième et de quatrième ordre sont à peu près analogues à ceux de même ordre de la feuille précédente.

Cordons scléreux, près de la lame épidermique intérieure.

Cette section rencontre la gaine de la troisième feuille gemmulaire, très riche en gros faisceaux à productions libéro-ligneuses très développées, ainsi que le limbe de la quatrième et de la cinquième feuille gemmulaire.

CHAPITRE IV.

Germinations du type Dictyosperma.

Les onze genres suivants présentent le même mode de germination que le type *Dictyosperma aureum* :

Kentia Bl.,	*Nephrosperma* Balf.,
Archontophœnix Wendl. et Dr.,	*Hyophorbe* Gaertn.,
Rhopalostylis Wendl. et Dr.,	*Geonoma* Willd ,
Dictyosperma Wendl. et Dr.,	*Calyptronoma* Grsb. et Wendl.,
Euterpe M.,	*Desmoncus* M.
Howea Becc.,	

Le genre qui m'a fourni le troisième type sera examiné en premier lieu. Les autres seront traités d'après l'ordre adopté par Bentham et Hooker [1].

Dictyosperma aureum [2].

La troisième feuille gemmulaire a déjà étalé son limbe.

Portion libre du cotylédon réduite à sa gaîne. Graine directement accolée à la partie inférieure de cette gaîne. La hauteur de la gaîne cotylédonaire est alors égale à la moitié de la hauteur de la première feuille gemmulaire.

[1] BENTHAM et HOOKER, *Genera plantarum*.

[2] Le *D. aureum* Wendl. et Dr. a pour synonyme : *Areca aurea* Hort. (DE KERCHOVE DE DENTERGHEM, *Les Palmiers*, p. 243).

La première et la seconde feuille gemmulaire, réduites à leur gaine et terminées par une pointe médiane, sont diamétralement opposées.

Troisième feuille : Limbe étroit, divisé en deux parties par une profonde échancrure qui atteint presque le pétiole [1]; ces deux divisions sont subulées et parcourues par des nervures parallèles qui se dirigent vers leurs extrémités aiguës. Pétiole assez allongé, à section réniforme. Gaine peu élevée, plissée longitudinalement.

La quatrième feuille n'est pas visible extérieurement. Une section transversale d'ensemble pratiquée à mi-hauteur de la première feuille gemmulaire, rencontre son limbe, plissé suivant le type I de A. Naumann [2].

Racine principale : quelques radicelles disposées sur deux ou trois rangées.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à treize pôles : Lames ligneuses formant files ; vaisseaux à section irrégulièrement ovale ; la plupart de ces lames se rejoignent deux à deux, formant un angle aigu au sommet duquel on trouve un vaisseau à diamètre prédominant.

Massifs libériens assez restreints, parfois étirés radialement, à éléments grillagés peu nombreux.

Fibres primitives à section polygonale, à parois épaissies ; allongées suivant le sens du rayon entre les massifs libériens et ligneux ; à peu près isodiamétriques dans la région centrale, où leurs parois sont excessivement épaissies ; il arrive que des fibres primitives épaissies séparent les massifs libériens du péricambium.

Péricambium : éléments quelquefois recloisonnés tangentiellement ; à parois épaissies, en face des massifs libériens ; vis-à-vis des lames ligneuses, au contraire, leurs parois restent minces.

Endoderme : cellules tabulaires à parois latérales et profonde montrant de forts épaississements en U.

Liège interne : peu développé ; quelques lacunes.

[1] PFITZER (*Ueber Früchte, Keimung und Jugendzustände einiger Palmen*, p. 48) avait signalé l'existence d'un limbe bifide chez : *D. album* Wendl. et Dr. et *D. rubrum* Wendl. et Dr.

[2] NAUMANN, *Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der Palmenblätter*, p. 238, fig. 32*a*.

Tissu fondam. second., siège d'un liège diffus : possède une grande largeur; deux anneaux; l'intérieur est formé de cellules à section polygonale, à parois minces; les éléments de l'anneau extérieur ont des parois épaissies; les rangées les plus superficielles du tissu fondamental secondaire sclérifié contiennent du tanin en grande quantité; nombreuses sclérites à section polygonale ou irrégulièrement ovale, à parois très épaissies et beaucoup plus réfringentes que les éléments sclérifiés de l'anneau extérieur (on rencontre aussi quelques sclérites dans le liège interne).

Assise subéreuse : tanin.

Assise pilifère : grands éléments tabulaires affaissés.

Section transversale de la gaîne cotylédonaire vers la moitié de sa longueur.

Anneau épaissi dans la région qui fait face à l'observateur.

Épiderme extérieur : les cellules ne sont pas allongées en poils.

Tissu fondamental : les éléments de la zone externe présentent de nombreux recloisonnements tangentiels et radiaux; il s'y est établi un liège diffus; plus intérieurement, grands éléments non recloisonnés, laissant entre eux de larges méats; c'est dans cette région que sont localisés les faisceaux; les éléments du tissu fondamental ont leurs parois légèrement sclérifiées; entre la zone des faisceaux et l'épiderme interne, se trouve une couche de cellules affaissées; cellules tannifères et cristalligènes (raphides courtes), dans toutes les régions du tissu fondamental; pas d'amidon.

Faisceaux : au nombre de quatre; pas de lacune antérieure; croissant extérieur plus épais que l'intérieur.

Les sections moyennes des deux premières feuilles gemmulaires, réduites à leur gaîne, diffèrent notablement entre elles.

Dans la première, les *faisceaux*, peu nombreux, peuvent être répartis en deux ordres [1]. Le système mécanique de cette feuille est augmenté par une légère sclérification des parois cellulaires du tissu fondamental. Le

[1] Vers le milieu de la gaîne cotylédonaire, les faisceaux de la première feuille gemmulaire deviennent très nombreux. Il y en a de trois ou quatre ordres. Les faisceaux de premier et de second ordre, quoique plus volumineux, présentent les mêmes caractères que sur la section moyenne. Les faisceaux de troisième et de quatrième ordre ne sont que des masses scléreuses.



croissant extérieur des faisceaux est fort développé. Le croissant intérieur, au contraire, n'est constitué que par une ou deux rangées de cellules à diamètre légèrement plus grand que dans le croissant extérieur. Le bois et le liber sont assez réduits. Le bois ne possède pas de vaisseau à diamètre prédominant. Il arrive que les faisceaux de second ordre soient représentés simplement par leur enveloppe scléreuse.

Tissu fondamental : éléments affaissés, dans la zone profonde, formant une traînée continue dans le voisinage de l'épiderme intérieur; les éléments des deux ou trois rangées contiguës à cette lame épidermique sont aussi légèrement sclérifiées; les cellules les plus extérieures sont tannifères; pas d'amidon; près de la face extérieure, cellules cristalligènes à raphides courtes.

Les *faisceaux* de la seconde gaîne sont de trois ou quatre ordres. Faisceaux de premier ordre : croissant intérieur très développé; croissant extérieur moins épais que dans la première feuille; bois et liber assez volumineux; pas de vaisseau à diamètre prédominant. — Les faisceaux de second ordre ne sont d'ordinaire que la réduction des précédents. — Ceux de troisième et de quatrième ordre : masses scléreuses.

Tissu fondamental : cellules à parois minces; pas de tanin; parfois de l'amidon.

La section transversale moyenne de la première feuille offre la forme d'un anneau régulier; celle de la seconde est un anneau légèrement épaissi suivant le plan médian et en arrière.

Ces deux sections rencontrent la gaîne de la troisième feuille gemmulaire et le limbe, déjà divisé, de la quatrième.

Les faisceaux de la troisième gaîne montrent, à mi-hauteur de la seconde feuille, deux ou trois vaisseaux à diamètre considérable.

Kentia exorhiza [1].

Germinations immédiatement reconnaissables.

Axe hypocotylé renflé, globuleux (pl. IV, fig. 4).

Région basilaire embrassante du cotylédon très courte, lignifiée.

[1] La portion libre du cotylédon était en partie flétrie, chez les exemplaires que j'avais à ma disposition; aussi, n'ai-je pu être fixé sur sa structure.

Les trois premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaine.

De l'axe hypocotylé, partent trois grosses racines, dont deux, plus fortes, portant de courtes radicelles.

La quatrième feuille est plissée, légèrement saillante hors de l'étui formé par les trois premières. Celles-ci sont terminées par une pointe médiane.

Une section transversale à mi-hauteur de la seconde feuille gemmulaire rencontre le limbe de la quatrième feuille. Il montre un mode de préfoliation qui peut être rapporté au type II de A. Naumann[1].

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à vingt-deux pôles : Lames ligneuses formant files; la plupart se rejoignent deux à deux ; vaisseau de grand diamètre, à l'extrémité intérieure des lames rayonnantes et au point d'intersection des lames confluentes ; ces gros vaisseaux sont séparés des lames par des éléments aplatis ou par une ou deux rangées de fibres sclérifiées; suivant la bissectrice de deux lames ligneuses confluentes, on observe quelquefois une petite lame appuyée contre le péricambium.

Entre les lames ligneuses rayonnantes, les massifs grillagés sont étirés radialement; leur longueur peut égaler celle des lames ligneuses voisines.

Les fibres primitives de la région centrale ont une section arrondie et des parois minces, comme chez le *Latania Loddigesii*; les autres ont une section polygonale et des parois un peu épaissies.

Péricambium : éléments assez grands, tabulaires, à parois minces, parfois recloisonnés tangentiellement.

Endoderme : cellules ovales; épaississements en U sur les faces radiales et profonde.

Liège interne : cellules gorgées de fécule.

Tissu fondam. second., siège d'un liège diffus : deux anneaux ; les cellules de l'anneau intérieur ont des parois minces ; celles de l'anneau extérieur, des parois épaissies ; sclérites irrégulièrement ovales; le tissu fondamental secondaire est assez restreint, relativement au grand diamètre de la racine; tanin, dans les couches superficielles.

[1] NAUMANN, *Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der Palmenblätter*, p. 238, pl. V, fig. 32*b*.

Assise subéreuse : une rangée de cellules sclérifiées; tanin en grande quantité.

Assise pilifère : grands éléments tabulaires.

La structure des trois premières feuilles est assez uniforme. Leur système mécanique offre un développement considérable.

Dans chaque gaine, les *faisceaux* sont répartis sur deux circonférences. La circonférence extérieure comprend des faisceaux de trois ou quatre ordres, parmi lesquels on trouve les faisceaux principaux de la gaine occupant sa région moyenne. La circonférence intérieure, située assez près de l'épiderme intérieur, est formée par des faisceaux de deux ordres. Faisceaux principaux : très allongés radialement; fourreau scléreux et productions libéroligneuses fort développées; croissant extérieur généralement plus large que le croissant intérieur; les éléments de ce dernier sont au moins trois fois aussi grands que ceux qui se trouvent dans le premier; sclérification des cellules du fourreau assez prononcée; ordinairement, un vaisseau à diamètre prédominant. — Faisceaux de second et de troisième ordre : volume moindre et réduction du croissant intérieur. — Les faisceaux de quatrième ordre ne sont représentés que par leur enveloppe scléreuse. — Les faisceaux de la circonférence intérieure sont réduits à l'état de masses scléreuses, possédant parfois des fibres primitives dans leur région centrale.

Tissu fondamental des gaines : cellules cristalligènes, à raphides courtes, situées à proximité des assises épidermiques.

Archontophœnix Alexandræ [1].

Leur troisième feuille gemmulaire est sortie. Limbe bifide dans sa partie supérieure qui est seule libre. Cette feuille ne possède, à cet état de développement, que son limbe et sa gaine. Les divisions du limbe sont lancéolées. Les nervures se rendent aux extrémités aiguës de ces divisions. Trois de ces nervures, plus fortes que les autres, font saillie sur la face inférieure de chaque division. Une section transversale vers le milieu de la longueur de la première

[1] L'*A. Alexandræ* Wendl. et Dr. a pour synonymie : *Ptychosperma Alexandræ* F. Müll. (De Kerchove de Denterghem, *Les Palmiers*, p. 230.)

feuille gemmulaire, laisse apercevoir la préfoliation de la troisième feuille, qui peut être rapportée au type II de A. Naumann [1].

Les deux premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaîne.

Axe hypocotylé non renflé, mais plutôt élancé.

Portion libre du cotylédon lignifiée.

Racine principale possédant des radicelles disposées sur trois rangées; trois racines latérales.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à onze pôles : Lames ligneuses formant files; vaisseaux ovales ou circulaires, relativement grands; vaisseau intérieur à diamètre prédominant.

Massifs grillagés grêles.

Péricambium : éléments tabulaires, disposés sur une ou deux rangées; vis-à-vis du bois, ces éléments ont des parois épaissies; en face du liber, des parois minces.

Endoderme : épaississements en U sur les faces profonde et radiales des cellules.

Liège interne : cellules ovales à parois minces; méats parfois assez grands; lacunes assez considérables allongées radialement.

Tissu fondam. second. : peu développé; deux anneaux; l'intérieur est constitué par des éléments à parois minces; dans l'anneau extérieur, les cellules ont des parois épaissies; ce dernier anneau est le siège d'un liège diffus; tout le tissu est parsemé d'éléments scléreux habituellement isolés, à diamètre aussi grand que celui des cellules ambiantes, et dont le cadre d'épaississement est d'ordinaire de forme irrégulière.

L'*assise subéreuse,* comme aussi les rangées les plus superficielles du liège diffus sclérifié, contient du tanin.

Assise pilifère : éléments tabulaires.

L'état de flétrissement dans lequel se trouvait la portion libre du cotylédon, ne m'a point permis d'examiner cet organe d'une manière convenable.

La structure des deux premières feuilles gemmulaires diffère peu.

[1] Naumann, *Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der Palmenblätter*, p. 238, pl. V, fig. 32*b*.

Tissu fondamental de la première gaine : cellules à section elliptique, à parois très légèrement sclérifiées, allongées tangentiellement, dans le voisinage de la face intérieure de l'organe; certaines cellules sont tannifères, d'autres, à section nettement ovale ou circulaire, sont cristalligènes (raphides courtes) ; ces dernières sont situées ordinairement dans toutes les régions du tissu fondamental.

Dans cette gaine, *faisceaux* de trois ordres. Faisceaux principaux et faisceaux de second ordre : croissant extérieur assez développé; le croissant intérieur, chez les derniers, est réduit à une ou deux rangées de cellules; pas de vaisseau à diamètre prédominant. Les faisceaux de troisième ordre sont généralement de simples masses scléreuses.

Dans la seconde feuille : *Faisceaux* beaucoup plus nombreux; répartis aussi en trois ordres; leur état de développement est plus avancé que dans la première feuille. Chez les faisceaux de premier et de second ordre : vaisseau à diamètre prédominant. — Faisceaux de troisième ordre : masses scléreuses.

Tissu fondamental : cellules ovales à parois minces; la plupart sont gorgées d'amidon (les grains ont une forme circulaire ou semi-circulaire); cellules cristalligènes à raphides courtes; pas de tanin.

La section transversale à mi-hauteur de la première gaine rencontre la gaine de la troisième feuille et le limbe de la quatrième.

Archontophœnix Cunninghamiana [1].

Germinations analogues à celles d'*A. Alexandræ*.

Première feuille gemmulaire normale : limbe complètement étalé; pétiole allongé.

Le limbe, encore plissé, de la quatrième feuille gemmulaire est sorti de l'étui formé par les deux premières feuilles réduites à leur gaine.

[1] L'*A. Cunnighamiana* Wendl. et Dr. a pour synonyme: *Ptychosperma Cunninghamiana* Wendl. et *Seaforthia elegans* Hook. et Hort. (De Kerchove de Denterghem, *Les Palmiers*, p. 231.)

Le limbe de la première feuille normale est profondément émarginé par une forte échancrure qui le divise en deux parties lancéolées, à la surface supérieure desquelles s'aperçoivent quatre grosses nervures, dont une médiane; les deux divisions du limbe sont réunies par un isthme assez large, parcouru en son milieu par une forte nervure qui prolonge le pétiole. Celui-ci est terminé inférieurement par une gaîne, qui s'aperçoit sur une section transversale à mi-longueur de la seconde feuille gemmulaire. Cette section montre aussi le limbe, encore plissé, de la quatrième. Même préfoliation que chez l'espèce précédente.

Radicelles plus nombreuses que chez l'*A. Alexandræ.*

La structure de la racine principale est fort semblable chez les deux espèces d'*Archontophœnix* que j'ai examinées.

Faisceau à douze pôles : vaisseaux, en général, à diamètre moindre que chez l'*A. Alexandræ;* vaisseau intérieur toujours séparé du reste de la lame par des éléments sclérifiés.

Liège interne : lacunes moins nombreuses et moins étendues.

Liège diffus : plus large; sclérites moins nombreuses, de même diamètre que les éléments ambiants.

Assise pilifère : éléments tabulaires.

On rencontre aussi des cellules cristalligènes, de forme spéciale, contenant des raphides courtes, dans le *tissu fondamental* de la première feuille gemmulaire. Ces cellules cristalligènes se trouvent dans toutes les régions du tissu.

La structure de la seconde feuille gemmulaire est aussi fort analogue à celle que j'ai relevée, dans le même organe, chez l'*A. Alexandræ.*

Dans la partie épaisse de la gaîne de la troisième feuille gemmulaire, se remarquent trois arcs de *faisceaux* qui vont se rejoindre dans la partie étroite de la gaîne. Les faisceaux principaux de l'arc extérieur montrent dans leur bois un vaisseau à diamètre prédominant. La même particularité s'observe dans les faisceaux de l'arc moyen. Le liber mou est divisé en deux îlots séparés par des éléments épaissis, chez les deux faisceaux de l'arc moyen les plus rapprochés du plan de symétrie. Sauf le faisceau situé dans le plan médian, tous les faisceaux de l'arc intérieur sont réduits à l'état

de masses scléreuses entourant des fibres primitives. Le faisceau médian de cet arc intérieur a une forme ovale, des productions libéro-ligneuses assez développées. Ce faisceau tourne son bois vers l'extérieur.

Rhopalostylis Baueri [1].

La troisième feuille gemmulaire avait étalé son limbe. Son pétiole est allongé. La quatrième n'était pas visible.

Le plissement, le mode de nervation, les découpures du limbe sont à peu près les mêmes que chez les *Archontophœnix*. A la surface interne des divisions du limbe, trois grosses nervures font saillie.

Racine principale rapidement détruite; racines latérales assez nombreuses (cinq ou six, à l'âge des jeunes plantes décrites); radicelles peu nombreuses, disposées sur trois ou quatre rangées.

La structure de la racine principale ne diffère pas beaucoup de celle qui a été relevée dans le genre précédent.

Faisceau à neuf pôles : Lames ligneuses plus courtes que chez le *R. sapida*; forment files; terminées intérieurement par un vaisseau à diamètre prédominant, presque toujours séparé du reste du bois par des fibres primitives sclérifiées.

Massifs grillagés, complètement entourés de fibres épaissies, aussi larges que longs.

Péricambium : éléments sclérifiés; l'épaisseur de leurs parois est plus grande en face des massifs grillagés.

Endoderme : cellules à épaississements en U très prononcés.

Liège interne : petites lacunes; parsemé, dans ses régions superficielle et

[1] Le *R. Baueri* Wendl. et Dr. a pour synonymie : *Kentia sapida* M., *Areca sapida* Sol., *A. Banksii* Cunningh., *A. Baueri* Hook., *Seaforthia robusta* Hort. (De Kerchove de Denterghem, *Les Palmiers*, p. 255.)

Les germinations de *R. Baueri* et de *R. sapida*, mises à ma disposition, étaient déjà très avancées. Il ne m'était plus possible de fixer le nombre de feuilles gemmulaires réduites à leur gaîne. Mes échantillons n'en montraient qu'une. Jusqu'à preuve du contraire, je considère les *Rhopalostylis* étudiés comme des Palmiers chez lesquels la première feuille gemmulaire seule est réduite à sa gaîne.

profonde, de sclérites à section polygonale ou ovale; le cadre d'épaississement de ces cellules est souvent irrégulier; sclérites en beaucoup plus grande quantité que chez les *Archontophœnix*, à diamètre plus petit que les éléments ambiants, isolées ou groupées par deux et par trois.

Tissu fondam. second., siège d'un liège diffus : double couronne; couronne extérieure formée d'éléments sclérifiés; couronne intérieure formée de cellules à parois minces; cette dernière couronne est parsemée de sclérites, comme aussi le liège interne; on n'observe pas la présence de ces éléments dans la couronne sclérifiée.

Assise subéreuse : une ou deux rangées de cellules à parois minces; tannifère.

Assise pilifère : éléments tabulaires.

Section transversale de la feuille gemmulaire réduite à sa gaine, vers la moitié de sa longueur.

Anneau fort épais suivant le plan médian et en avant, ouvert en arrière.

Tissu fondamental : cellules gorgées de grains d'amidon à section circulaire ou semi-circulaire; grands méats, entre les cellules ovales du tissu fondamental; cellules cristalligènes à raphides courtes, près de la lame épidermique extérieure.

Deux arcs de *faisceaux* se montrent dans la partie large de la gaine. Ces deux arcs se réunissent dans sa partie étroite, où ils sont représentés par une rangée de masses scléreuses enveloppant des fibres primitives. L'arc extérieur est constitué par des faisceaux de deux ordres. Les faisceaux de premier ordre, parmi lesquels se trouve le médian, sont très développés. Ils sont entourés par un fourreau scléreux fort large. Les éléments du croissant intérieur sont quatre fois aussi grands que ceux du croissant extérieur. — Les faisceaux de second ordre sont réduits à l'état de masses scléreuses enveloppant, ou non, des fibres primitives. — Les faisceaux de l'arc intérieur peuvent être aussi répartis en deux ordres. Cet arc ne comprend que deux faisceaux de premier ordre et deux faisceaux de second ordre. On trouve, de part et d'autre du plan médian, un faisceau de premier ordre séparé de ce plan par un faisceau de second ordre. Les faisceaux de second ordre sont grêles. Ceux de premier ordre sont plus développés que les grands faisceaux de l'arc extérieur, mais

un peu moins, cependant, que le faisceau médian. Les faisceaux de premier ordre, dans les deux arcs, possèdent ordinairement un vaisseau à diamètre prédominant.

La section transversale à mi-hauteur de la feuille gemmulaire réduite à sa gaine, rencontre la gaine de la première feuille normale et le limbe de la seconde.

Rhopalostylis sapida [1].

Exemplaires à peu près au même degré d'avancement que ceux qui m'ont servi pour l'espèce précédente.

Se distingue aisément du *R. Baueri* par la forme du limbe de la première feuille normale ; ce limbe est ici beaucoup plus étroit; ses deux divisions, formées par émargination suivant le plan médian, sont presque subulées, comme chez le *Dictyosperma aureum*.

Racine principale, déjà en partie flétrie, accompagnée de trois racines latérales très développées; nombreuses radicelles sur trois ou quatre rangées.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à dix pôles : Lames ligneuses très longues, formant files, terminées intérieurement par un vaisseau à diamètre prédominant, séparé du reste de la lame par des fibres épaissies.

Massifs libériens très allongés.

Péricambium ; éléments plus grands que chez le *R. Baueri;* section tabulaire; en face des massifs grillagés, parois épaissies.

Épiderme : épaississements en U très prononcés.

Liège interne : sclérites isolées ou groupées par deux, à diamètre plus petit que les éléments environnants.

Tissu fondam. second. : sclérites, dans la région où les éléments ont conservé leurs parois minces.

Système mécanique plus développé que chez le *R. Baueri.*

La feuille gemmulaire réduite à sa gaine offre des caractères structuraux

[1] Le *R. sapida* Wendl. et Dr. a pour synonymie : *Kentia sapida* Hort. et *Areca sapida* Hook. (De Kerchove de Denterghem, *Les Palmiers*, p. 255.)

analogues à ceux qui ont été rencontrés, dans le même organe, chez le *R. Baueri.*

La section transversale, à mi-hauteur de cette gaine, montre la gaine de la première feuille gemmulaire normale et le pétiole de la seconde. Ce pétiole est fort velu.

Euterpe edulis [1].

Martius a décrit et figuré divers stades de la germination de l'*E. ensiformis* M. et de l'*E. oleracea* M. [2]. Ce dernier Palmier présenterait une particularité intéressante. Avec les progrès de la végétation et dès l'apparition des feuilles gemmulaires normales, la partie à l'origine très étroite du cotylédon, qui unit le suçoir à la gemmule, s'allongerait légèrement. Il serait intéressant de vérifier ce fait qui, s'il était prouvé, serait de nature à faire considérer l'*E. oleracea* comme constituant une forme intermédiaire, au point de vue du mode de germination, entre le type *Sabal* et le type *Dictyosperma.*

Chez l'*E. edulis,* comme dans les germinations d'*E. ensiformis* et d'*E. oleracea* figurées par *Martius,* les deux premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaine.

Le limbe, encore plissé, de la troisième feuille gemmulaire fait saillie hors de la seconde gaine. Ce limbe est déjà penné. Ses divisions, généralement au nombre de huit, sont lancéolées et parcourues par des nervures qui se dirigent vers leurs extrémités aiguës. *Pfitzer* [3] range cependant l'*E. edulis* parmi les Palmiers dont la première feuille normale possède un limbe bifide. — L'*E. edulis* ne présenterait-il pas un cas analogue à celui de l'*Howea Belmoreana,* où l'on remarque que le premier limbe, bifide dans certains échantillons, est penné dans d'autres cas par suite d'échancrures qui se produisent dans les deux lobes du limbe? — Martius [4] a figuré pour

[1] L'*E. edulis* M. a pour synonymie : *E. Globosa* Gaertn?, *E. pisifera* β Gaertn., *Manaca Maraitonorum vel Palmeto* Humb. (De Kerchove de Denterghem, *Les Palmiers,* p. 244).

Les exemplaires que je possédais de ce palmier ne permettaient pas l'étude de la gaine cotylédonaire.

[2] Martius, *Hist. nat. palm.*, c. III, tab. 30, fig. XXV, 1-6 et fig. I-XIX.

[3] Pfitzer, *Ueber Früchte, Keimung und Jugendzustände einiger Palmen,* p. 48.

[4] Martius, *Hist. nat. palm.*, tab. 30, fig. XVIII.

l'*E. oleracea* un limbe bifide dont les divisions sont parcourues par trois grosses nervures. On remarque que le limbe penné de notre *E. edulis* présente aussi trois nervures plus épaisses que les autres.

Outre la racine principale, rapidement flétrie, deux ou trois racines latérales assez développées; peu de radicelles; celles-ci sont disposées sur trois rangées.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à huit pôles : Lames ligneuses formant files, assez allongées et ordinairement rayonnantes; à leur extrémité intérieure, vaisseau à diamètre prédominant, généralement séparé du reste de la lame par des éléments épaissis.

Massifs grillagés assez réduits, à près près ovales, complètement enveloppés de fibres sclérifiées.

Péricambium : vis-à-vis des massifs grillagés, éléments très épaissis; ailleurs, éléments à parois minces; les éléments péricambiaux sont très grands.

Endoderme : forts épaississements en U sur les faces radiales et profonde.

Liège interne : pas de lacunes; un très petit nombre de massifs scléreux analogues à ceux qui ont été rencontrés dans le même tissu chez le dattier.

Tissu fondam. second. siège d'un liège diffus : deux anneaux ; l'intérieur, très étroit, est constitué par des cellules à parois minces; l'extérieur, très large, est formé par des cellules à parois sclérifiées; tanin, dans les cellules sclérifiées les plus superficielles.

Assise subéreuse : tanin.

Assise pilifère : éléments tabulaires.

Section transversale de la première feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

Faisceaux de trois ordres. Les faisceaux principaux, dont le médian, sont les plus rapprochés du centre de figure de l'organe; leur croissant extérieur est plus épais que l'intérieur; leur bois et leur liber sont peu développés; pas de vaisseau à diamètre prédominant. — Les faisceaux de second ordre ne sont que la réduction des précédents. — Quant aux faisceaux de troisième ordre, ils sont représentés par des masses scléreuses entourant des fibres

primitives. — Ces trois ordres de faisceaux sont assez écartés de l'épiderme extérieur.

Tissu fondamental : des éléments contenant beaucoup de tanin; cellules cristalligènes à raphides courtes.

Section transversale de la seconde feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

Faisceaux de trois ou quatre ordres. Tous sont pourvus d'un fourreau scléreux très épais. Les éléments du croissant extérieur sont relativement grands chez les faisceaux de premier et de second ordre. Dans les faisceaux de premier ordre, on rencontre un vaisseau à diamètre prédominant. Les faisceaux sont beaucoup plus rapprochés de l'épiderme extérieur que dans la première feuille gemmulaire.

Tissu fondamental : tanin et raphides courtes.

Ces deux sections rencontrent le pétiole de la troisième feuille gemmulaire : triangle à angles mousses et à face antérieure concave; trois arcs de faisceaux dont les extrémités se rejoignent aux angles latéraux de la face concave; les fourreaux scléreux des faisceaux qui se trouvent près de ces bords, se soudent pour augmenter le système mécanique de l'organe.

Howea Belmoreana [1].

Les deux premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaine.

La première feuille normale a étalé son limbe, déjà penné, et la feuille suivante, à limbe encore plissé, est sortie de l'étui formé par les deux premières gaines. Le limbe de la première feuille normale présente quatre divisions lancéolées, au sommet desquelles se dirigent les nervures, dont six, plus grosses que les autres, font saillie à la surface intérieure de ce limbe. Il arrive que le limbe de la première feuille normale soit bifide, la découpure médiane s'étant seule produite. Ce fait est néanmoins accidentel et on doit ranger,

[1] Le *H. Belmoreana* Becc. a pour synonymie : *Grisebachia Belmoreana* Wendl. et Dr. et *Kentia Belmoreana* F. Müll. (De Kerchove de Denterghem, *Les Palmiers,* p. 247).

J'ai examiné des échantillons appartenant aux deux espèces dont se compose le genre *Howea*, mais aucun de ces échantillons ne m'a permis d'étudier la structure de la portion libre du cotylédon.



avec *Pfitzer*[1], le *H. Belmoreana* dans la catégorie des Palmiers dont la première feuille normale possède un limbe penné.

La préfoliation répond au type I de *A. Naumann*[2], comme le montre, sur une section transversale à mi-longueur de la seconde gaine, le limbe de la quatrième feuille gemmulaire.

Racine principale déjà en partie détruite; quelques racines latérales assez développées; radicelles sur trois rangées.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à quatorze pôles : Lames ligneuses formant files, courtes, rayonnantes ou confluentes, terminées intérieurement par un vaisseau à section circulaire et à diamètre prédominant, séparé du reste de la lame par une rangée de cellules aplaties ou sclérifiées; les autres vaisseaux ont une section polygonale ou ovale; ils sont d'ordinaire de très petit diamètre.

Massifs grillagés très restreints.

Fibres primitives presque obstruées, tant l'épaississement de leurs parois est considérable.

Péricambium : éléments ovales, épaissis; en face des massifs grillagés, ils sont plus épaissis que partout ailleurs.

Endoderme : épaississements en U très accusés.

Liège interne : massifs scléreux presque toujours formés par un grand nombre d'éléments; on rencontre cependant aussi des massifs formés par la réunion de deux ou trois cellules scléreuses; petites lacunes.

Tissu fondam. second., siège d'un liège diffus : sclérites en grande quantité, quelquefois gemmelées; deux anneaux; anneau intérieur constitué par des éléments à parois minces; anneau extérieur formé par des cellules à parois épaissies; ces sclérites s'aperçoivent dans les deux anneaux, qui sont très larges.

Assise subéreuse : les cellules de cette assise et les cellules les plus superficielles du liège diffus contiennent du tanin.

Assise pilifère : larges éléments tabulaires sclérifiés.

[1] Pfitzer, *Ueber Früchte, Keimung und Jugendzustände einiger Palmen*, p. 49.

[2] Naumann, A., *Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der Palmenblätter*, p. 258, pl. V, fig. 32*b*.

Les deux premières feuilles gemmulaires ont un système mécanique très développé.

Faisceaux très nombreux, répartis en trois ordres, entourés par un fourreau scléreux dont l'épaisseur est très considérable dans sa région extérieure.

Cordons scléreux possédant, ou non, à leur intérieur des fibres primitives, jetés sans aucun ordre apparent dans la région moyenne et dans la région profonde du tissu fondamental.

Tissu fondamental : cellules allongées tangentiellement, à parois très légèrement épaissies.

La section transversale d'ensemble vers le milieu de la longueur de la seconde gaine, rencontre, outre le limbe de la quatrième feuille gemmulaire, la gaine de la troisième.

Système mécanique plus complet encore que dans les deux premières gaines.

Faisceaux : disposés sur trois arcs dans la partie élargie; les productions libéro-ligneuses des faisceaux principaux sont très développées; le fourreau scléreux qui les entoure est excessivement épais, surtout dans sa partie extérieure; dans beaucoup de ces faisceaux principaux, le liber mou est divisé en deux ilots; on ne rencontre que rarement un vaisseau à diamètre prédominant.

Tissu fondamental : tanin.

Howea Forsteriana [1].

Les jeunes plantes de cette espèce ne diffèrent que fort peu des jeunes *H. Belmoreana*.

Le limbe de la première feuille normale a une forme assez variable. Il est quelquefois bifide, parfois aussi il est penné et possède alors quatre ou cinq divisions lancéolées [2]. Trois ou quatre nervures plus grosses que les autres se montrent à sa surface intérieure.

[1] Le *H. Forsteriana* Becc. a pour synonymie : *Grisebachia Forsteriana* Wendl. et Dr. et *Kentia Forsteriana* F. Müll. (De Kerchove de Denterghem, *Les Palmiers*, p. 247.)

[2] Je rangerai le *H. Forsteriana* parmi les Palmiers dont le limbe de la première feuille normale est penné.



La structure de la racine principale est fort analogue à celle qui a été relevée chez les *H. Belmoreana*. J'ai compté ici dix-huit pôles dans le *faisceau* de la racine et j'ai observé que des éléments des massifs scléreux sont plus épaissis que dans l'espèce précédente.

Quant aux premières gaînes, leur structure rappelle assez exactement celle qui a été relevée chez les *H. Belmoreana*. Le tissu fondamental de ces gaînes est abondamment pourvu de cellules cristalligènes à raphides courtes.

Nephrosperma Van Houtteanum[1].

Les trois premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaîne.

Le limbe de la première feuille normale est profondément échancré suivant le plan médian. Les deux lobes ainsi formés sont souvent divisés à leur tour. Les divisions du limbe sont très étroites et presque subulées.

Le limbe de la quatrième feuille gemmulaire, encore plissé, sort de l'étui, formé par les trois premières feuilles.

Racine principale accompagnée de trois racines latérales; courtes et minces radicelles, disposées sur trois rangées.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à treize pôles : Lames ligneuses formant files, rayonnantes ou confluentes, terminées intérieurement par un vaisseau à section circulaire et à diamètre prédominant, séparé du reste de la lame par une rangée d'éléments aplatis ou de fibres primitives épaissies.

Massifs grillagés très grêles.

Péricambium : grandes cellules tabulaires à parois minces, parfois recloisonnées tangentiellement.

Endoderme : cellules rectangulaires, à épaississements en U sur les faces radiales et profonde.

[1] Le *N. Van Houtteanum* Balf. a pour synonymie : *Oncosperma*? *Van Houtteanum* Wendl. et *Areca nobilis* Hort. (De Kerchove de Denterghem, *Les Palmiers*, p. 252).

La structure de la région basilaire embrassante du cotylédon, qui était flétrie, n'a pu être étudiée.



Liège interne : petites lacunes, sclérites de même dimension que les éléments ambiants.

Tissu fondam. second. : liège diffus, double couronne, caractères habituels.

Assise pilifère : éléments tabulaires.

La structure varie peu d'une gaine à l'autre.

Les *faisceaux* peuvent être répartis en trois ordres. Ceux de troisième ordre sont réduits à l'état de masses scléreuses renfermant parfois des fibres primitives. Dans les faisceaux de premier et de second ordre, le croissant extérieur est plus épais que l'intérieur. Les éléments de ce dernier croissant sont quatre fois plus grands que ceux du premier.

On rencontre des *cordons scléreux,* près de la face intérieure.

Dans la troisième gaine, le bois des *faisceaux* de premier et de second ordre comprend un vaisseau à diamètre prédominant.

Le *tissu fondamental,* dans les trois gaines, renferme des cellules cristalligènes à raphides courtes.

Les sections transversales à mi-hauteur de la seconde et de la troisième gaine, rencontrent le pétiole de la première feuille normale: prisme triangulaire à arêtes mousses et à face antérieure plane ou déprimée.

Dans ce pétiole, les *faisceaux* sont disposés sur deux arcs qui se rejoignent aux angles antérieurs du prisme, où le fourreau scléreux des faisceaux atteint son développement maximum. Quelques massifs scléreux entourant des fibres primitives sont situés près de la face antérieure du pétiole. L'arc extérieur comprend des faisceaux de deux ordres, à productions libéro-ligneuses très développées et dont le croissant extérieur est plus épais que l'intérieur. Les faisceaux de l'arc intérieur sont comparables aux faisceaux principaux de l'arc précédent. Ils sont entourés par un fourreau scléreux à croissant intérieur plus épais que l'extérieur. Les faisceaux principaux des deux arcs montrent un vaisseau à diamètre prédominant. Le faisceau médian appartient à l'arc extérieur.

Hyophorbe Verschaffelti [1].

Les trois premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaîne.

La première feuille normale possède un limbe étroit, divisé par une profonde échancrure médiane en deux parties aciculaires, au sommet desquelles se dirigent les nervures. Les exemplaires étudiés ne montraient que l'extrémité supérieure de ce limbe.

Racine principale assez forte et quatre racines latérales; radicelles sur trois ou quatre rangées.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de la longueur.

Faisceau à huit pôles : Lames ligneuses fort courtes; très petit nombre de vaisseaux; vaisseau le plus intérieur à diamètre légèrement prédominant, ne dépassant guère cependant celui des fibres primitives ambiantes; ce vaisseau est séparé du reste de la lame par une rangée de cellules aplaties ou sclérifiées; sa section est circulaire, celle des autres vaisseaux est ovale; les lames ligneuses sont assez espacées.

Massifs grillagés assez larges, formant un angle obtus.

Péricambium : éléments tabulaires assez grands, à parois minces; ils ne sont pas séparés du liber par des fibres primitives sclérifiées.

Endoderme : épaississements en U peu accusés.

Liège interne : sclérites isolées ou groupées par deux et par trois, à section ovale ou polygonale.

Tissu fondam. second. : tous les éléments ont encore des parois minces; grands méats, mais pas de lacunes; sclérites.

Assise pilifère : beaucoup d'éléments allongés en poils.

La structure des trois gaînes, relevée sur des sections transversales pratiquées vers la moitié de leur longueur, varie peu d'une gaîne à l'autre.

Section transversale de la première gaîne vers la moitié de sa longueur.

[1] L'*Hyophorbe Verschaffelti* a pour synonymie : *Areca Verschaffelti* Hort. (De Kerchove de Denterghem, *Les Palmiers*, p. 247).

L'état de flétrissement de mes *Hyophorbe* ne m'a point permis d'étudier la structure de la portion libre de leur cotylédon.

Faisceaux de deux ou trois ordres [1]. Dans les faisceaux principaux et ceux de second ordre: petits vaisseaux à section polygonale. — Faisceaux de troisième ordre : simples masses scléreuses enveloppant parfois quelques fibres primitives.

Tissu fondamental : cellules très allongées tangentiellement.

La section transversale à mi-hauteur de la première gaîne rencontre la seconde et la troisième feuille gemmulaire réduites à leur gaîne. Elle montre aussi le pétiole de la quatrième qui, sur cette section, a la forme d'un croissant, et enfin le limbe de la cinquième.

Section transversale de la seconde gaîne vers la moitié de sa longueur. A peu près les mêmes caractères que la première.

Faisceaux principaux à fourreau complètement sclérifié (ce qui n'existait pas dans la feuille précédente); vaisseau à diamètre légèrement prédominant, dans certains de ces faisceaux.

Tissu fondamental : cellules cristalligènes à raphides courtes.

Une section transversale de cette gaîne vers la moitié de sa longueur, rencontre, outre la troisième feuille gemmulaire réduite à sa gaîne, le limbe, déjà divisé de la quatrième, répondant au type II de préfoliation de A. Naumann [2].

Section transversale de la troisième gaîne vers la moitié de sa longueur.

Tissu fondamental : cellules à section elliptique, un peu allongées tangentiellement.

Faisceaux principaux : les éléments du croissant extérieur sont en général de même grandeur, mais plus épaissis que ceux qui constituent le croissant intérieur; vaisseau circulaire à diamètre prédominant. — Chez les faisceaux de second ordre, le croissant intérieur est beaucoup réduit. — Les faisceaux de troisième ordre sont d'ordinaire de simples masses scléreuses entourant des fibres primitives.

[1] C'est le cas pour les trois gaînes.

[2] NAUMANN, *Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der Palmenblätter*, p. 238, pl. V, fig. 32*b*.

La section transversale à mi-hauteur de cette dernière gaine, ne rencontre que le limbe de la quatrième feuille.

Faisceaux principaux : très développés; vaisseaux à diamètre prédominant; le croissant intérieur chez les deux faisceaux les plus développés possède une largeur très considérable, et les cellules qui le composent sont beaucoup plus grandes que celles du croissant extérieur.

Pas de *tissu de charnière*.

Hyophorbe amaricaulis [1].

Même état d'avancement que la forme précédente.

Axe hypocotylé très renflé, ce qui n'est pas le cas pour l'*H. Verschaffelti.*

Les trois premières feuilles gemmulaires, réduites aussi à leur gaine, sont beaucoup plus courtes et plus ouvertes.

Les jeunes *H. amaricaulis* sont, comme l'espèce précédente, d'une végétation lente.

Le limbe de la première feuille normale est légèrement plus large et plus épais que chez l'*H. Verschaffelti.*

La racine principale et les trois racines latérales ne portent que fort peu de radicelles.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à quatorze pôles : Lames ligneuses beaucoup plus allongées que chez l'*H. Verschaffelti,* terminées intérieurement par un vaisseau, dont le diamètre l'emporte de beaucoup sur celui des autres vaisseaux et aussi sur celui des fibres primitives ambiantes, ordinairement séparé du reste de la lame par trois ou quatre rangées d'éléments sclérifiés; dix lames ligneuses se rejoignent deux à deux, formant un angle au sommet duquel se trouve un grand vaisseau.

Massifs grillagés de forme triangulaire; l'angle intérieur est aigu.

Péricambium : une seule rangée de cellules tabulaires à parois minces.

Endoderme : cellules à épaississements en U assez accentués, sur les parois radiales et profonde.

[1] Le *H. amaricaulis* M. a pour synonymie : *Areca speciosa* Hort. et *Sublimia amaricaulis* Comm. (De Kerchove de Denterghem, *Les Palmiers*, p. 247).

Liège interne et *tissu fondam. second.* : sclérites à section irrégulièrement arrondie ou pentagonale; il arrive que ces éléments se groupent par deux ou par trois; les cellules qui composent les rangées superficielles du tissu fondamental secondaire commencent à se sclérifier.

Assise pilifère : certains éléments sont très allongés.

La structure des premières feuilles gemmulaires est peu différente de celle qui a été relevée dans les organes correspondants de l'espèce précédente.

Section transversale de la première gaine vers la moitié de sa longueur.

Tissu fondamental : les éléments qui avoisinent l'épiderme intérieur sont flétris et affaissés; il en résulte que les faisceaux, situés à l'origine dans la partie moyenne du tissu fondamental, se rapprochent de la face intérieure de la gaine.

Faisceaux : le fourreau n'est pas complètement sclérifié.

La section transversale pratiquée vers la moitié de la longueur de la première gaine rencontre, outre la deuxième et la troisième gaine, les gaines de la quatrième et de la cinquième feuille, le limbe de la sixième. Ce limbe montre un plissement qui répond à la définition du type II de A. Naumann [1].

Des sections analogues pratiquées sur la seconde et la troisième gaine, ne présentent guère de différences avec la première.

Les *faisceaux* de ces gaines ne possèdent pas de vaisseau à diamètre prédominant. Ils sont plus développés que dans la première.

Tissu fondamental : cellules cristalligènes à longues raphides.

Une section transversale à mi-longueur de la seconde feuille rencontre la troisième, la gaine de la quatrième et le limbe de la cinquième.

Vers le milieu de la longueur de la troisième gaine, une section transversale rencontre le pétiole de la quatrième feuille et le limbe de la cinquième.

[1] Naumann, A., *Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der Palmenblätter*, p. 238, pl. V, fig. 32*b*.

Geonoma gracilis [1].

La première feuille normale a étalé son limbe.

Les deux premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaîne. La longueur de la seconde gaîne est à peu près double de celle de la première.

Le limbe de la première feuille normale est bifide. L'échancrure médiane dépasse le milieu de la longueur du limbe. Les nervures se dirigent vers les extrémités aiguës de ses divisions, qui sont lancéolées.

La racine principale et les deux racines latérales portent des radicelles disposées sur trois ou quatre rangées.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à onze pôles : Lames ligneuses terminées intérieurement par un vaisseau à diamètre prédominant; six lames ligneuses se rejoignent deux à deux et forment un angle aigu au sommet duquel se trouve un grand vaisseau ; vaisseaux ovales ou circulaires.

Massifs libériens assez grêles; fort peu d'éléments grillagés.

Péricambium : cellules tabulaires qui ont généralement des parois épaissies en face des massifs libériens.

Endoderme : cellules très larges possédant des épaississements en U sur les faces profonde et radiales.

Liège interne : éléments arrondis à parois minces, laissant des méats peu étendus; certaines cellules contiennent des grains de fécule; d'autres, des raphides courtes.

Tissu fondam. second. : double anneau; l'anneau intérieur est formé par une ou deux rangées de cellules à parois minces; l'extérieur, siège d'un liège diffus, par six ou sept rangées de cellules à parois épaissies.

Assise subéreuse sclérifiée.

Assise pilifère : éléments tabulaires.

Section transversale de la première feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

[1] Les échantillons examinés n'ont point permis d'étudier d'une manière satisfaisante la portion libre du cotylédon.

Tissu fondamental : cellules ovales à parois minces, allongées tangentiellement; nombreuses cellules cristalligènes à raphides courtes, près de l'épiderme extérieur.

Faisceaux de trois ordres. Dans les faisceaux principaux, on ne trouve pas de vaisseau à diamètre prédominant.

Section transversale de la seconde feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

Faisceaux de trois ordres. Les éléments du croissant extérieur des faisceaux principaux diffèrent peu de ceux qui constituent le croissant intérieur. Les faisceaux n'ont pas de vaisseau à diamètre prédominant.

La section transversale à mi-hauteur de la seconde gaîne rencontre la gaîne de la troisième feuille gemmulaire et le limbe de la quatrième. Celui-ci montre un plissement se rapportant au type II de A. Naumann [1].

La gaîne de la troisième feuille gemmulaire présente un fort épaississement suivant le plan médian et en avant. Dans cette partie élargie, se trouvent deux arcs de *faisceaux* qui vont se rejoindre dans la partie étroite, où tous les faisceaux sont réduits à l'état de masses sciéreuses possédant, ou non, des fibres primitives. L'arc extérieur est appliqué contre l'épiderme extérieur; l'arc intérieur, contre l'épiderme intérieur. Dans ces deux arcs, les faisceaux peuvent être groupés en deux ordres. Les faisceaux principaux qui ont des productions libéro-ligneuses développées, sont entourés par un épais fourreau scléreux dans lequel il n'y a guère lieu d'établir une distinction entre les éléments de la partie extérieure et ceux de la partie intérieure. Les faisceaux de second ordre sont ordinairement réduits à l'état de masses scléreuses enveloppant des fibres primitives. Chez certains faisceaux de l'arc intérieur, il y a fusion des fourreaux scléreux.

Calyptronoma Levautzi.

Le limbe de la première feuille normale est étalé.

A cet âge, la portion libre du cotylédon est flétrie.

[1] Naumann, A., *Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der Palmenblätter*, p. 238, pl. V, fig. 32*b*.



La première feuille normale a un limbe bifide qui ressemble beaucoup à celui que présente le même organe chez le *Geonoma gracilis.* Les divisions de ce limbe sont lancéolées. Dans chaque division, les nervures, parmi lesquelles il s'en trouve quatre plus grosses, se dirigent vers les extrémités aiguës. Le pétiole de cette feuille est assez allongé.

Une section transversale pratiquée vers la moitié de la longueur de la seconde feuille gemmulaire, rencontre la gaîne de la troisième et le limbe de la quatrième, dont le plissement peut être rapporté au type II de A. Naumann [1].

Les deux premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaîne.

Racine principale accompagnée de deux racines latérales; radicelles assez courtes et assez nombreuses, disposées sur trois rangées.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à dix pôles : lames ligneuses comprenant des vaisseaux circulaires et ovales; quelques-unes se rejoignent deux à deux et forment un angle aigu au sommet duquel on rencontre un grand vaisseau; les grands vaisseaux intérieurs sont séparés des lames auxquelles ils appartiennent par des éléments plats ou sclérifiés.

Péricambium : cellules tabulaires parfois recloisonnées tangentiellement, possédant, en face des massifs grillagés, des parois épaissies.

Endoderme : éléments rectangulaires dont les faces radiales et profonde sont épaissies en U.

Liège interne : méats assez larges, cellules circulaires à parois minces.

Tissu fondam. second. : une double couronne, liège diffus.

Assise pilifère : éléments tabulaires.

La structure de la première feuille gemmulaire est à peu près analogue à celle de la seconde.

Faisceaux de trois ordres. Le faisceau médian de la seconde feuille est situé près de l'épiderme extérieur. Les faisceaux principaux les plus proches de ce médian se trouvent dans la région moyenne du tissu fondamental. Le

[1] Naumann, A., *Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der Palmenblätter,* p. 238, pl. V, fig. 32*b*.

croissant extérieur est plus épais que l'intérieur, dans les faisceaux les plus extérieurs. C'est le contraire qui a lieu chez les faisceaux qui sont plus rapprochés du centre de figure de l'organe.

Tissu fondamental : dans la zone profonde des deux premières feuilles gemmulaires, certaines cellules contiennent de l'amidon ; cellules cristalligènes à raphides courtes, près de l'épiderme extérieur.

Une section transversale vers la moitié de la longueur de la seconde feuille gemmulaire, rencontre la gaine de la première feuille normale et le limbe de la seconde.

La gaine de la première feuille normale offre, sur une pareille section, la forme d'un anneau plus épais en avant.

Les *faisceaux*, dans la partie épaisse de l'anneau, sont disposés sur trois arcs qui vont se réunir dans la partie étroite. Les faisceaux de l'arc extérieur sont de deux ordres. Ils tournent leur bois vers le centre de figure de l'organe. Leurs productions libéro-ligneuses sont très développées. Le croissant extérieur de ces faisceaux est plus épais que l'intérieur. — Les faisceaux de l'arc moyen sont plongés dans la région moyenne du tissu fondamental. Leurs productions libéro-ligneuses sont très développées. Ces faisceaux, comme aussi les faisceaux principaux de l'arc extérieur, ont leur liber mou divisé en deux îlots. Ils possèdent un vaisseau à diamètre prédominant. Leur croissant intérieur est beaucoup plus épais que l'extérieur. — Les faisceaux de l'arc intérieur sont au nombre de trois. Un de ces faisceaux est placé dans le plan médian et tourne son bois vers la surface extérieure de l'organe. Les deux autres sont réduits à l'état de masses scléreuses enveloppant des fibres primitives.

Tissu fondamental : cellules cristalligènes à raphides courtes.

Desmoncus sp. ?

Desmoncus brésilien, que je n'ai pu spécifier parce que l'échantillon ne le permettait pas. Étant donné l'état défectueux de cette jeune plante, il ne m'a été possible d'étudier que certaines parties.

Le limbe de la première feuille normale est étalé. Ce limbe possède une

forme remarquable. Il comprend deux lames lancéolées, insérées au sommet du pétiole, indépendantes l'une de l'autre et assez semblables aux folioles d'une feuille composée (pl. IV, fig. 5). Chacune d'elles montre une grosse nervure médiane et une assez grande quantité de nervures plus fines qui se dirigent vers leur extrémité aiguë. Entre ces deux lames, se rencontre un filament. Le pétiole a une section triangulaire à angles mousses et à face antérieure creusée d'un sillon. Une section transversale à mi-hauteur de la seconde feuille gemmulaire rencontre la gaine de la première feuille normale.

Cette même section laisse apercevoir le plissement de la quatrième feuille gemmulaire. Ce plissement, assez compliqué, ne me semble pouvoir être rapporté à aucun des trois types de A. Naumann [1] (pl. IV, fig. 6).

Les deux premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaîne et terminées par une pointe médiane.

Une racine latérale; racine principale accompagnée de quelques racines secondaires assez fortes; deux ou trois rangées de radicelles.

Section transversale de la racine principale vers la moitié de sa longueur.

Faisceau à vingt pôles: Certaines lames ligneuses sont rayonnantes; d'autres se rejoignent deux à deux en formant un angle aigu au sommet duquel on rencontre un grand vaisseau ovale; parfois, suivant la bissectrice de l'angle, se montre une troisième lame beaucoup plus petite; outre les grands vaisseaux, on trouve de petits éléments vasculaires à section polygonale ou arrondie.

Les massifs grillagés les plus volumineux sont situés entre les lames ligneuses rayonnantes, et non dans les angles formés par les lames ligneuses confluentes.

Les fibres primitives de la région centrale ont des parois moins épaissies que les autres.

[1] NAUMANN, A., *Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der Palmenblätter*, p. 238, pl. V, fig. 32*b*.

Péricambium : grandes cellules tabulaires à parois minces.

Endoderme : cellules ovales; épaississements en U sur les faces radiales et profonde.

Liège interne : cellules arrondies; la plupart sont gorgées de grains de fécule circulaires ou elliptiques; petites lacunes étirées radialement.

Tissu fondam. second. : double couronne, caractères habituels.

Assise subéreuse : grands éléments à parois minces.

Assise pilifère : cellules de grand diamètre, tabulaires, à paroi extérieure sclérifiée.

Section transversale de la première feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

Faisceaux de quatre ordres. Productions libéro-ligneuses peu développées. Fourreau scléreux assez restreint.

Tissu fondamental : les éléments adjacents aux fourreaux sont allongés perpendiculairement aux faisceaux; les cellules de la zone profonde sont gorgées d'amidon; cellules cristalligènes à raphides courtes.

Section transversale de la seconde feuille gemmulaire, vers la moitié de sa longueur.

Faisceaux : de quatre ordres; plus développés; les faisceaux de premier et de second ordre ont un vaisseau à diamètre prédominant; croissant extérieur assez épais.

Une section transversale à mi-hauteur de la seconde feuille gemmulaire rencontre la gaîne de la troisième et le limbe de la quatrième.

La gaîne de la première feuille normale est très épaisse dans sa partie antérieure.

Dans cette région, les *faisceaux* sont groupés sur deux arcs qui se rejoignent dans la partie mince, où tous les faisceaux sont réduits à des masses scléreuses enveloppant, ou non, des fibres primitives. Les faisceaux de l'arc extérieur sont appliqués contre l'épiderme extérieur. On peut les répartir en trois ordres. L'arc intérieur ne comprend que quatre faisceaux comparables aux faisceaux principaux de l'arc extérieur. Ces faisceaux principaux montrent des productions libéro-ligneuses très développées. Les faisceaux qui com-

posent l'arc intérieur et quelques faisceaux de l'arc extérieur, ont leur liber mou divisé en deux ilots. Les faisceaux principaux de l'arc extérieur et les faisceaux de l'arc intérieur ont un vaisseau à diamètre prédominant. Le croissant extérieur est très volumineux chez les faisceaux de l'arc extérieur. Il est plus épais que le croissant intérieur. Le contraire a lieu chez les faisceaux de l'arc intérieur.

Des *cordons scléreux* se rencontrent dans la région moyenne de la partie épaisse de la gaine, ainsi que le long de l'assise épidermique intérieure.

Les productions libéro-ligneuses du limbe de la quatrième feuille sont peu développées.

CHAPITRE V

Conclusions.

Les germinations de Palmiers se ramènent à trois types : *Phœnix, Sabal* et *Dictyosperma.*

L'axe hypocotylé est court et ordinairement renflé à sa base.

La portion libre du cotylédon comprend une région basilaire embrassante et une région cylindrique, dans les germinations du type *Phœnix* et du type *Sabal.*

Dans les germinations du type *Phœnix,* la région cylindrique fait suite à la région embrassante.

Dans certaines germinations du type *Phœnix,* le bord de la fente gemmulaire est déchiré (*Phœnix, Caryota, Latania*). Chez d'autres, cette région déchirée manque ; il y a un léger exhaussement du bord de la fente (*Chamærops, Livistona, Trachycarpus*).

Dans les germinations du type *Sabal,* le cylindre cotylédonaire est inséré près de la base de la région embrassante.

La graine reste accolée à la partie inférieure de la région embrassante, dans les germinations du type *Dictyosperma.*

La première feuille gemmulaire est toujours réduite à sa gaîne. Elle est seule réduite à cet état dans les genres [1] :

Rhopalostylis [2],	*Chamærops,*
Caryota,	*Livistona,*
Phœnix,	*Trachycarpus,*
Sabal,	*Thrinax,*
Washingtonia,	*Latania.*

[1] Les énumérations se font d'après l'ordre adopté par Bentham et Hooker (*Genera plantarum*).

[2] Voy. l'observation qui se trouve au bas de la p. 84.



Les deux premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaine [1] dans les genres :

Archontophœnix,	*Calyptronoma,*
Dictyosperma,	*Pritchardia,*
Euterpe,	*Desmoncus,*
Howea,	*Cocos.*
Geonoma,	

Enfin, les trois premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaine [2] dans les genres :

Kentia,
Nephrosperma,
Hyophorbe.

Ces diverses gaînes sont ouvertes dans leur partie supérieure et terminées par une pointe médiane plus ou moins forte, selon les espèces. Elles présentent des nervures parallèles et parfois des sillons longitudinaux. Leur surface est lisse.

Le limbe de la première feuille normale est allongé, entier et terminé en pointe, chez les genres :

Phœnix,	*Livistona,*
Sabal,	*Trachycarpus,*
Washingtonia,	*Thrinax,*
Chamærops,	*Cocos.*
Pritchardia,	

[1] Il faut ajouter ici le *Klopstockia cerifera* Karst. Sur le dessin qu'en donne Karsten, on remarque que les deux premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaîne. (Karsten, *Vegetationsorgane der Palmen*, pl. IV, fig. 6.)

[2] Karsten (*Vegetationsorgane der Palmen*, pl. IV, fig. 5) a représenté la germination d'un *Iriartœa præmorsa* Klotzsch. Les quatre premières feuilles gemmulaires seraient réduites à leur gaîne? Il m'a été impossible de vérifier ce fait, ne possédant aucun échantillon de cette plante. Jamais je n'ai rencontré un jeune Palmier possédant un si grand nombre de feuilles gemmulaires réduites à leur gaîne.

Il est divisé en deux parties chez les genres :

Kentia,
Archontophœnix,
Rhopalostylis,
Dictyosperma,
Euterpe[1],
Nephrosperma,
Hyophorbe,
Geonoma,
Calyptronoma.

Chez les genres *Caryota* et *Desmoncus*, ce limbe possède les formes remarquables décrites au sujet du *C. sobolifera*[2] et d'un *Desmoncus* brésilien[3].

Ce limbe est penné chez les *Howea*[4] et les *Latania*.

La première feuille normale montre des nervures parallèles. Les cordons libéro-ligneux horizontaux qui les relient, ne sont pas toujours visibles par transparence. La nervure médiane du limbe est parfois prédominante. Dans certains cas, elle ne se différencie guère des autres grosses nervures. Cette feuille porte des poils, chez toutes les plantes examinées. Ces poils sont parfois très longs. Comme ils ne semblent guère offrir d'intérêt pour la classification, il me suffira ici de mentionner leur existence. J'ajouterai que ces poils sont caducs et qu'ils ne s'aperçoivent plus sur les parties de la première feuille, étalées hors de l'étui gemmulaire.

A. Naumann[5] qui a étudié l'histoire du développement des feuilles de Palmiers, distingue, chez ces plantes, trois types principaux de plissement. Le plissement que présentent les jeunes *Desmoncus* examinés ne me semble pouvoir être rapporté à aucun de ces types.

La section transversale du pétiole de la première feuille normale affecte la forme d'un triangle à angles mousses et à face antérieure déprimée ou sillonnée. A l'âge des plantes examinées, ce pétiole est très court chez

[1] Voy. p. 87.
[2] Voy. p. 34.
[3] Voy. p. 101.
[4] Voy. p. 90.
[5] NAUMANN, A., *Beiträge zur Entwickelungsgeschichte der Palmenblätter*, p. 238.

certaines espèces (dattier, etc.); chez d'autres, il possède déjà une longueur assez considérable (*Phœnix canariensis*, etc.).

Une section analogue de la gaîne de la première feuille normale offre la forme d'un anneau. Celui-ci est toujours plus épais suivant le plan de symétrie de l'organe et dans sa partie postérieure.

Les autres feuilles se développent plus ou moins rapidement. C'est ainsi qu'à l'âge considéré (la première feuille normale seule visible extérieurement), une section transversale pratiquée vers la moitié de la longueur de la première feuille gemmulaire ne rencontre que deux feuilles [1], chez les jeunes Palmiers suivants :

Phœnix dactylifera,	*Chamærops humilis,* var. *tomentosa,*
P. canariensis,	— — — *flexuosa,*
P. farinifera,	— — — *arborescens,*
P. reclinata,	*Livistona australis,*
P. spinosa,	*L. chinensis,* etc.

Cette même section en rencontre trois, chez les

Caryota sobolifera,
Cocos flexuosa, etc.;

quatre, chez les

Geonoma gracilis, etc.

L'appareil radical comprend une racine principale, dont la longueur devient parfois assez considérable, et des racines latérales grêles insérées à la base de l'axe hypocotylé dans la germinations de

Caryota sobolifera,	*Chamærops humilis,* var. *flexuosa,*
Phœnix dactylifera,	— — — *arborescens,*
P. canariensis,	*Livistona australis,*
P. farinifera,	*L. chinensis,*
P. reclinata,	*Trachycarpus excelsus,*
P. spinosa,	*Latania Loddigesii,*
Chamærops humilis, var. *tomentosa,*	*Cocos flexuosa.*

[1] Y compris la première.

Ces racines latérales sont, au contraire, très développées et aussi fortes ou presque aussi fortes que la racine principale, c'est-à-dire que cette racine principale est rapidement flétrie et remplacée par des racines latérales, chez les

Kentia exorhiza,
Archontophœnix Alexandræ,
A. Cunninghamiana,
Rhopalostylis Baueri,
R. sapida,
Euterpe edulis,
Howea Belmoreana,
H. Forsteriana,
Nephrosperma Van Houtteanum,
Hyophorbe Verschaffelti,
H. amaricaulis,
Geonoma gracilis,
Calyptronoma Levautzi,
Desmoncus, sp.?

Je n'ai point rencontré de racines latérales chez les

Dictyosperma aureum,
Sabal umbraculifera,
S. Adansoni,
Pritchardia pacifica,
Thrinax excelsa.

La racine principale, qui donne parfois naissance à des racines secondaires (*Desmoncus*), porte des radicelles sur deux à huit rangées verticales. Ces radicelles restent quelquefois très courtes.

A l'extrémité végétative de cette racine principale, on voit une coiffe nettement accusée.

La structure de la racine principale, relevée vers la moitié de sa longueur, offre des variations intéressantes à noter.

Le faisceau du *Thrinax excelsa* ne compte que six pôles, alors que le *Latania Loddigesii* en montre plus de trente au même stade.

J'ai relevé dans le tableau suivant le nombre moyen des pôles du faisceau de la racine chez les espèces examinées :

NOMS DES ESPÈCES.	NOMBRE moyen des lames.	NOMS DES ESPÈCES.	NOMBRE moyen des lames.
Kentia exorhiza	22	*Phœnix reclinata*	11
Archontophœnix Alexandræ	11	*P. spinosa*	12
A. Cunninghamiana	12	*Sabal Adansoni*	17
Rhopalostylis Baueri	9	*S. umbraculifera*	9
R. sapida	10	*Washingtonia filifera*	10
Dictyosperma aureum	13	*Chamærops humilis*, var. *arborescens*	9
Euterpe edulis	8	*C. humilis*, var. *flexuosa*	9
Howea Belmoreana	14	*C. humilis*, var. *tomentosa*	8
H. Forsteriana	18	*Pritchardia macrocarpa*	21
Nephrosperma Van Houtteanum	13	*P. pacifica*	11
Hyophorbe amaricaulis	14	*Livistona australis*	10
H. Verschaffelti	8	*L. chinensis*	10
Geonoma gracilis	11	*Trachycarpus excelsus*	6
Calyptronoma Levautzi	10	*Thrinax excelsa*	6
Caryota sobolifera	12	*Latania Loddigesii*	31
Phœnix canariensis	13	*Desmoncus*, sp.?	20
P. dactylifera	11	*Cocos flexuosa*	22
P. farinifera	10		

Les lames ligneuses comprennent des vaisseaux à section circulaire, ovale, ou polygonale, dont le diamètre va en augmentant de la périphérie du faisceau vers le centre. Dans les lames rayonnantes, ces vaisseaux sont disposés sur une seule rangée en files étroites (*Euterpe edulis*, etc.), ou forment des massifs cunéiformes (dattier). Les parois de ces vaisseaux sont ordinairement épaissies et portent des ponctuations scalariformes. Les lames manifestent souvent une tendance à se rejoindre deux à deux, parfois réa-

lisée dans certaines germinations (*Geonoma gracilis*, etc.). Les lames ligneuses confluentes forment un angle aigu au sommet duquel se rencontre un vaisseau de grand diamètre. On trouve quelquefois une petite lame ligneuse suivant la bissectrice de l'angle ainsi formé (*Cocos flexuosa*, etc.). Ce ne sont point toujours deux lames voisines qui se réunissent; il se présente des cas où les lames confluentes sont séparées par deux ou trois lames rayonnantes (*Cocos flexuosa*), ou même confluentes à leur tour deux à deux. Le vaisseau intérieur est habituellement remarquable par son grand diamètre qui l'emporte de beaucoup sur celui des autres; parfois il ne diffère guère de ceux-ci (*Hyophorbe Verschaffelti*). Ce grand vaisseau intérieur est séparé du reste de la lame ligneuse soit par une rangée d'éléments plats à parois minces, soit par une ou plusieurs rangées de fibres primitives à parois sclérifiées. Il y a parfois découpure de la lame ligneuse par l'intercalation en divers points de plusieurs rangées de fibres primitives scléreuses.

Dans les massifs libériens, les plus grands éléments grillagés sont parfois les plus intérieurs (*Phœnix dactylifera*); dans d'autres cas, ils sont situés au milieu du massif (*Latania Loddigesii*). Chez le *Latania Loddigesii*, les massifs libériens sont divisés par des fibres primitives en deux îlots très distants l'un de l'autre et situés sur un même rayon.

Le liber est séparé du bois par des fibres primitives. Ces fibres ont ordinairement une section polygonale. Entre les massifs grillagés et les massifs ligneux, elles sont allongées suivant le sens du rayon; dans la région centrale, elles sont isodiamétriques. Dans certains cas, leurs parois sont minces; dans d'autres, elles sont épaissies. Il arrive que les fibres primitives de la région centrale du faisceau soient fort différentes des autres. C'est ainsi qu'à certains niveaux de la racine principale du dattier et d'autres Palmiers, les fibres du centre ont des parois minces alors qu'ailleurs leurs parois sont épaissies. Les fibres centrales du faisceau polyarque du *Latania Loddigesii* ont une section arrondie, alors que dans le reste du faisceau leur section est polygonale. Il y a plus: les fibres primitives, chez ce Palmier, sont épaissies dans la zone des grands vaisseaux alors qu'elles ne le sont pas ailleurs. Les fibres primitives de la région centrale du faisceau polyarque du *Kentia exorhiza* ont une section arrondie.

Les éléments du péricambium ont une section tabulaire ou polygonale. Ils sont parfoistrès grands (*Latania Loddigesii*). Chez certaines jeunes plantes, les éléments péricambiaux sont épaissis en face des massifs libériens (*Chamærops humilis*, v. *tomentosa*, etc.) ou des fibres primitives qui séparent le liber des lames ligneuses (*Phœnix canariensis*). Dans le faisceau de quelques Palmiers, ils se recloisonnent une fois tangentiellement; chez d'autres, il peut y avoir deux recloisonnements successifs.

L'endoderme du faisceau polyarque est constitué par des éléments à section carrée ou ovale présentant des épaississements sur toutes leurs faces (certaines cellules de l'endoderme du *Thrinax excelsa*), ou sur leurs faces radiales et profonde seulement, formant des épaississements en forme d'U, comme on en trouve chez le *Smilax*. On peut ranger dans cette dernière catégorie presque tous les Palmiers étudiés. Les épaississements sur les faces radiales et profonde peuvent ne pas affecter la forme d'un U. Ces épaississements n'intéressent que les faces latérales chez les jeunes *Sabal umbraculifera* et *Latania Loddigesii*. Enfin, l'endoderme présente une alternance d'arcs scléreux et d'arcs à parois minces chez les trois variétés examinées du *Chamærops humilis*.

Le liège interne (tissu cortical interne à développement centrifuge, d'après la terminologie spéciale de Van Tieghem) est composé de cellules à parois minces, à section ovale ou circulaire, laissant entre elles des méats parfois assez grands, et dont la sériation radiale n'est visible que dans le voisinage du faisceau. Ce tissu montre quelques petites lacunes produites par décollement et affaissement des cellules. Parfois ces petites lacunes sont très nombreuses (*Latania Loddigesii*). Chez d'autres Palmiers, on observe l'existence de grandes lacunes séparées par des cloisons n'ayant que quelques cellules d'épaisseur (certains *Phœnix*).

Le liège interne est circonscrit par une couronne de tissu fondamental secondaire. Cette couronne est composée de deux ou trois anneaux. Dans ce dernier cas, l'anneau moyen est formé de cellules à parois sclérifiées; les anneaux intérieur et extérieur, de cellules à parois minces. L'anneau moyen est alors le siège d'un liège diffus (dattier). Quand cette couronne n'est constituée que par deux anneaux, l'extérieur possède des parois épaissies; l'intérieur, des parois minces. Chez les *Hyophorbes* examinés, la couronne

de tissu fondamental secondaire n'est pas encore sclérifiée. Les cellules du tissu fondamental secondaire ont une section polygonale. Elles sont allongées radialement ou tangentiellement.

Le système cortical ne présente pas d'éléments épaissis chez les

Geonoma,	*Trachycarpus,*
Calyptronoma,	*Thrinax,*
Chamærops,	*Desmoncus.*
Livistona,	

Il présente des éléments scléreux isolés (sclérites), ou groupés par deux et par trois, localisés dans le tissu fondamental secondaire, dans les genres :

Kentia,
Archontophœnix,
Dictyosperma.

On trouve des sclérites à la fois dans le liège interne et dans le tissu fondamental secondaire de la racine des

Rhopalostylis,
Nephrosperma,
Hyophorbe.

Chez certains de ces genres, des éléments scléreux se rencontrent dans le liège diffus sclérifié. Ils se distinguent des éléments qui les entourent par leur plus grande réfringence et par leurs parois plus épaisses.

Les sclérites ont le même diamètre que les éléments du tissu ambiant, ou possèdent un diamètre différent.

Dans le liège interne des genres suivants, on trouve des massifs scléreux :

Euterpe,
Caryota,
Phœnix,
Latania,
Cocos.

Les *Howea* ont un liège interne renfermant des massifs scléreux et un tissu fondamental secondaire parsemé de sclérites.

Les éléments de l'assise subéreuse conservent parfois des parois minces et leur diamètre est plus grand que celui des éléments sous-jacents; mais il arrive aussi que les éléments subéreux ne sont que très difficilement distingués des cellules du tissu fondamental secondaire. Ils contiennent d'ordinaire du tannin, comme aussi les éléments des rangées les plus superficielles du tissu fondamental secondaire.

A la périphérie de l'organe, on aperçoit une assise pilifère dont les cellules se prolongent en poils chez les

Hyophorbe,

Trachycarpus.

Les éléments qui composent l'assise pilifère ne sont point développés en poils chez la plupart des autres Palmiers examinés; ils ont une section tabulaire et des parois minces. Ces éléments ont des parois sclérifiées chez les

Sabal.

Dans le tissu cortical des racines, on rencontre des cellules cristalligènes renfermant soit des raphides, courtes ou longues, soit des cristaux prismatiques d'oxalate de chaux. Certaines cellules contiennent des grains de fécule.

La structure de la portion libre du cotylédon offre des variations peu considérables chez les trois types de germination.

On rencontre, chez tous les Palmiers examinés, un tissu fondamental avec liège diffus dans sa zone externe. Ce liège est légèrement sclérifié.

Dans les germinations du type *Phœnix,* la lame épidermique extérieure, à parois minces, est affaissée, dans la région basilaire embrassante du cotylédon et dans la partie inférieure de la région cylindrique, contre le liège diffus sclérifié sous-jacent (*Phœnix*), ou formée par des cellules prolongées en poils (*Livistona*). Les cellules épidermiques de la partie supérieure de la région cylindrique ont les faces externe et latérales sclérifiées. Dans cette partie du cotylédon, on rencontre des stomates.

Dans les germinations du type *Sabal,* l'assise épidermique extérieure, en certains points, est constituée à la fois par des éléments tabulaires à parois

externe et latérales sclérifiées et des éléments prolongés en poils. On rencontre ces derniers éléments sur les aces postérieure et latérales du cylindre ainsi que sur la portion de la gaîne située sous le cylindre, et entre ce cylindre et l'insertion de la gaîne sur 'axe hypocotylé. On ne trouve ailleurs que des éléments tabulaires à parois externe et latérales sclérifiées.

L'épiderme extérieur des germinations du type *Dictyosperma* est composé de cellules à parois externe et latérales épaissies.

L'épiderme intérieur, dans les germinations des trois types, est formé par des éléments à section rectangulaire, allongés tangentiellement et dont les parois externe et latérales sont sclérifiées.

Chez le *Phœnix dactylifera* et le *Latania Loddigesii*, le bois des faisceaux montre une lacune antérieure. Chez les autres Palmiers, où il m'a été possible d'examiner la structure cotylédonaire, je n'en ai pas rencontré [1].

Le liber est fort développé dans les faisceaux que l'on rencontre dans la portion libre du cotylédon. Le bois l'est moins, sauf cependant dans la partie supérieure du cylindre cotylédonaire, où l'on constate une prédominance du bois sur le liber. Le bois ne comprend que des petits vaisseaux à section polygonale.

Les faisceaux que l'on trouve dans la région cylindrique du cotylédon sont entourés par un double fourreau scléreux. Le fourreau extérieur est composé de cellules à section ovale; le fourreau intérieur, par deux croissants différenciés, ou non, histologiquement.

La structure des premières feuilles gemmulaires, réduites à leur gaîne, est assez uniforme. Leur section transversale moyenne a la forme d'un anneau d'ordinaire épaissi dans le plan médian, en avant ou en arrière suivant le numéro d'ordre de la feuille.

Ces anneaux possèdent : une lame épidermique extérieure; une lame épidermique intérieure; une masse de tissu fondamental parcourue longitudinalement par des faisceaux libéro-ligneux et des cordons scléreux.

[1] D'après Gehrke (*Beiträge zur Kenntniss der Anatomie von Palmenkeimlingen*, p. 25), il n'existerait pas de lacune antérieure dans le bois des faisceaux de la portion libre du cotylédon chez les Palmiers qu'il a étudiés et dont on trouvera la liste p. 15.



L'épiderme extérieur est constitué par des cellules à section carrée, à parois externe et radiales épaissies. Ces cellules sont allongées suivant le sens de la longueur de l'organe. Vues de face, leurs parois sont rectilignes. Cet épiderme porte des stomates. Les stomates se rapportent soit à ceux que j'ai décrits chez le dattier, soit à ceux qui ont été rencontrés chez le *Chamœrops humilis*. Les stomates du dattier diffèrent d'ailleurs assez peu des stomates du *Chamœrops humilis*. Les stomates sont habituellement disposés en séries longitudinales.

Les éléments de l'assise épidermique intérieure ont une section rectangulaire. Ils sont allongés tangentiellement. Leurs parois externe et radiales sont sclérifiées.

Les cellules du tissu fondamental ont une section ovale. Elles sont allongées tangentiellement ou radialement suivant l'épaisseur de l'anneau. Leurs parois sont minces ou légèrement sclérifiées. Ces cellules sont toujours étirées transversalement et un peu aplaties dans le voisinage de l'assise épidermique intérieure. Elles laissent entre elles des méats plus ou moins grands et plus ou moins nombreux, selon les espèces. Les cellules contiguës aux faisceaux peuvent être étirées perpendiculairement à la surface extérieure de ces faisceaux (*Pritchardia macrocarpa*, etc.). Les cellules du tissu fondamental sont parfois gorgées d'amidon, surtout dans la zone profonde de la région plus épaisse de l'anneau. Le tissu fondamental possède aussi des cellules cristalligènes à raphides courtes ou longues. On remarque que certaines gaines, en l'absence d'amidon, sont abondamment pourvues de tannin. C'est surtout le cas dans la première feuille.

Les faisceaux peuvent être répartis en quatre ordres ou en moins de quatre ordres, chez les jeunes

Caryota,
Chamœrops,
Thrinax, etc.

Ils doivent être groupés en plus de quatre ordres chez les

Phœnix,
Livistona,
Latania.

Parmi les faisceaux principaux, on en rencontre toujours un médian. Sauf le médian, les faisceaux principaux sont symétriques deux à deux et vont en décroissant de volume de part et d'autre du plan médian [1].

Les faisceaux principaux sont les plus rapprochés du centre de figure de l'organe.

Entre deux faisceaux principaux, se rencontrent un ou plusieurs faisceaux de second ordre. Les faisceaux de troisième ordre séparent les faisceaux de premier ordre des faisceaux de second ordre.

Tous les faisceaux sont entourés par un fourreau scléreux, qui est composé de deux croissants dans les faisceaux à productions libéro-ligneuses développées. Le croissant extérieur est constitué par des éléments plus petits et à parois plus épaissies que le croissant intérieur. Cette différence histologique avait déjà été relevée par Mohl [2]. Le croissant le plus épais est toujours celui qui regarde la surface de l'organe la plus proche du centre de figure du faisceau.

On observe parfois, dans les faisceaux principaux et de second ordre, une division du liber mou en deux ilots séparés entre eux et du bois par des fibres primitives sclérifiées.

Le bois comprend des vaisseaux à section arrondie ou polygonale, parmi lesquels il s'en trouve souvent un dont le diamètre est prédominant.

Les faisceaux de second ordre ne sont d'ordinaire que la réduction des faisceaux principaux. Quant aux faisceaux d'ordre plus élevé, ils ne sont souvent représentés que par des fibres primitives non différenciées, entourées par une masse scléreuse; parfois même ce ne sont que des masses scléreuses.

Des cordons scléreux sans trace vasculaire se trouvent souvent éparpillés dans le voisinage de la face interne des feuilles réduites à leur gaîne.

Dans le limbe de la première feuille normale, le tissu fondamental se

[1] La description du mode d'apparition des divers ordres de faisceaux a été faite chez le *Chamædorea Schiedeana* M., par Nägeli (*Beitr. zur Wiss. Botan.*, Heft I, p. 129). Elle est applicable à tous les jeunes Palmiers que j'ai eu l'occasion d'examiner.

[2] Voy. p. 11.

différencie quelquefois dans le prolongement des plis en un tissu de charnière, décrit pour le dattier et d'autres Palmiers.

Les faisceaux sont aussi entourés par un fourreau scléreux, mais ici on n'observe pas toujours une différenciation bien nette entre les éléments du croissant extérieur et ceux du croissant intérieur.

Le pétiole de la première feuille gemmulaire a habituellement la forme d'un prisme triangulaire à arêtes mousses et à face antérieure déprimée. Ses faisceaux sont disposés suivant deux ou trois arcs ouverts antérieurement. Les extrémités de ces arcs se rejoignent aux bords de la face antérieure, où se remarque fréquemment la fusion des gaines scléreuses de faisceaux voisins, ce qui tend à augmenter le système mécanique de l'organe. Certains pétioles présentent des particularités intéressantes, quant à l'orientation des faisceaux.

La gaine de la première feuille normale est à peu près analogue aux gaines que forment les premières feuilles gemmulaires dépourvues de pétiole et de limbe. Il y a cependant des exceptions à cette règle (*Calyptronoma Levautzi, Caryota sobolifera*, etc....).

*
* *

Quelques caractères suffiront pour distinguer génériquement, les uns des autres, les Palmiers examinés. L'étude de nouvelles espèces permettra seule de déterminer quelle valeur on peut attribuer aux caractères employés.

La comparaison des genres nous fournit les diagnoses suivantes :

A. — Germinations du type Phoenix.

Genre Caryota. — La première feuille gemmulaire est réduite à sa gaine. Le limbe de la première feuille normale est divisé en deux parties triangulaires réunies par un isthme étroit. Le faisceau de la racine possède moins de quinze pôles. L'endoderme ne présente pas une alternance d'arcs scléreux et d'arcs à parois minces. Le tissu cortical de la racine contient des massifs

scléreux. Les éléments sclérifiés du tissu fondamental secondaire de la racine sont allongés radialement. Les éléments de l'assise pilifère ont une section tabulaire. Les faisceaux de la première feuille gemmulaire peuvent être répartis en moins de quatre ordres.

Genre Phœnix. — La première feuille gemmulaire est réduite à sa gaine. Le limbe de la première feuille normale est allongé, entier et terminé en pointe. Sa nervure médiane ne se distingue pas des autres grosses nervures. Le faisceau de la racine possède moins de quinze pôles. L'endoderme ne présente pas d'alternance d'arcs scléreux et d'arcs à parois minces. Le tissu cortical de la racine contient des massifs scléreux. Les éléments sclérifiés du tissu fondamental secondaire de la racine sont allongés suivant le sens du rayon. Les éléments de l'assise pilifère sont tabulaires Les faisceaux de la première feuille gemmulaire sont répartis en plus de quatre ordres.

Genre Chamærops. — La première feuille gemmulaire est réduite à sa gaine. Le limbe de la première feuille normale est allongé entier et terminé en pointe. Sa nervure médiane ne se distingue guère des autres grosses nervures. Le faisceau de la racine possède moins de quinze pôles. L'endoderme présente une alternance régulière, ou non, d'arcs scléreux et d'arcs à parois minces. Le tissu cortical de la racine ne contient pas de massifs scléreux. Les éléments sclérifiés du tissu fondamental secondaire de la racine sont allongés radialement. Les éléments de l'assise pilifère ont une section tabulaire. Les faisceaux de la première feuille gemmulaire peuvent être répartis en moins de quatre ordres.

Genre Livistona. — La première feuille gemmulaire est réduite à sa gaine. Le limbe de la première feuille normale est allongé, entier et terminé en pointe. Sa nervure médiane ne se distingue guère des autres grosses nervures. Le faisceau de la racine possède moins de quinze pôles. L'endoderme ne présente pas une alternance d'arcs scléreux et d'arcs à parois minces. Le tissu cortical de la racine ne contient pas de massifs scléreux.

Les éléments sclérifiés du tissu fondamental secondaire de la racine sont allongés radialement. Les éléments de l'assise pilifère sont prolongés en poils. Les faisceaux de la première feuille gemmulaire peuvent être répartis en plus de quatre ordres.

Genre Trachycarpus. — La première feuille gemmulaire est réduite à sa gaine. Le limbe de la première feuille normale est allongé, entier et terminé en pointe. Sa nervure médiane ne se distingue guère des autres grosses nervures. Le faisceau de la racine possède moins de quinze pôles. L'endoderme ne présente pas une alternance d'arcs scléreux et d'arcs à parois minces. Le tissu cortical de la racine ne contient pas de massifs scléreux. Les éléments sclérifiés du tissu fondamental secondaire de la racine sont allongés radialement. Les éléments de l'assise pilifère sont prolongés en poils. Les faisceaux de la première feuille gemmulaire peuvent être répartis en quatre ordres ou moins.

Genre Thrinax. — La première feuille gemmulaire est réduite à sa gaine. Le limbe de la première feuille normale est allongé, entier et terminé en pointe. Il est très épais. Sa nervure médiane est fort peu prédominante. L'endoderme ne présente pas une alternance d'arcs scléreux et d'arcs à parois minces. Le tissu cortical de la racine ne contient pas de massifs scléreux. Les éléments sclérifiés du tissu fondamental secondaire de la racine sont allongés radialement. Les éléments de l'assise pilifère ont une section tabulaire. Les faisceaux de la première feuille gemmulaire peuvent être répartis en moins de quatre ordres.

Genre Latania. — La première feuille gemmulaire est réduite à sa gaine. Le limbe de la première feuille normale est penné. Le faisceau de la racine possède plus de quinze pôles [1]. L'endoderme ne présente pas d'alternance d'arcs scléreux et d'arcs à parois minces. Le tissu cortical de la racine contient des massifs scléreux. Les éléments sclérifiés du tissu

[1] On notera également les autres particularités intéressantes de ce faisceau.

fondamental secondaire de la racine sont allongés radialement. Les éléments de l'assise pilifère ont une section tabulaire. Les faisceaux de la première feuille gemmulaire peuvent être répartis en plus de quatre ordres.

Genre Cocos. — Les deux premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaine. Le limbe de la première feuille normale est allongé, entier et terminé en pointe. Sa nervure médiane est fort prédominante. Le faisceau de la racine possède plus de quinze pôles. L'endoderme ne présente pas d'alternance d'arcs scléreux et d'arcs à parois minces. Le tissu cortical de la racine ne contient pas de massifs scléreux. Les éléments sclérifiés du tissu fondamental secondaire de la racine sont allongés tangentiellement. Les éléments de l'assise pilifère ont une section tabulaire. Les faisceaux de la première feuille gemmulaire peuvent être répartis en quatre ordres ou moins.

B. — Germinations du type Sabal.

Genre Sabal. — La région cylindrique du cotylédon est insérée obliquement sur la région basilaire embrassante. La première feuille gemmulaire seule est réduite à sa gaine. Le tissu fondamental secondaire de la racine est formé par deux anneaux. L'anneau intérieur est constitué par des cellules à parois minces; l'extérieur, par des cellules à parois sclérifiées. Les éléments de l'assise pilifère ont une section tabulaire. Leurs parois externe et latérales sont sclérifiées.

Genre Washingtonia. — La région cylindrique du cotylédon est insérée perpendiculairement sur la région basilaire embrassante. La première feuille gemmulaire seule est réduite à sa gaine. Le tissu fondamental secondaire de la racine est formé par trois anneaux. Le moyen est constitué par des éléments sclérifiés. Les éléments de l'assise pilifère conservent des parois minces.

Genre Pritchardia. — Le cylindre cotylédonaire est inséré perpendiculairement sur la région basilaire embrassante. Les deux premières feuilles

gemmulaires sont réduites à leur gaine. Le tissu fondamental secondaire de la racine est analogue à celui du dattier. Les éléments de l'assise pilifère conservent des parois minces.

C. — Germinations du type Dyctyosperma [1].

Genre Kentia. — Les trois premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaîne. La première feuille normale a un limbe bifide [2]. La racine principale est accompagnée de racines latérales. Les fibres primitives de la région centrale du faisceau polyarque ont une section arrondie et des parois minces. On rencontre des sclérites [3] dans le tissu fondamental secondaire de la racine. Les éléments de l'assise pilifère ont une section tabulaire.

Genre Archontophœnix. — Les deux premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaine. La première feuille normale a un limbe bifide. La racine principale est accompagnée de racines latérales. Les fibres primitives de la région centrale du faisceau polyarque ont une section polygonale. On rencontre des sclérites dans le tissu fondamental secondaire de la racine. Les éléments de l'assise pilifère ont une section tabulaire.

Genre Rhopalostylis. — La première feuille gemmulaire seule est réduite à sa gaîne. La première feuille normale a un limbe bifide. La racine principale est accompagnée de racines latérales. Les fibres primitives de la région centrale du faisceau polyarque ont une section polygonale. On rencontre des sclérites dans tout le tissu cortical de la racine. Les éléments de l'assise pilifère ont une section tabulaire.

[1] Les *Oreodoxa* possèdent, d'après Gehrke (*Beiträge zur Kenntniss der Anatomie von Palmenkeimlingen*, p. 8), le mode de germination que Martius a appelé *admotiva*. Ils doivent par conséquent être rangés auprès du type *Diclyosperma*. Leur premier limbe est, d'après Pfitzer (*Ueber Früchte, Keimung und Jugendzustände einiger Palmen*, p. 46), allongé, entier et terminé en pointe.

[2] Je n'ai rencontré de limbe réellement bifide que dans la tribu des Arécées.

[3] Je n'ai observé la présence des sclérites que dans la tribu des Arécées.

Genre Dictyosperma. — Les deux premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaine. La première feuille normale a un limbe bifide. Il n'y a pas de racine latérale. Les fibres primitives de la région centrale du faisceau polyarque ont une section polygonale. On rencontre des sclérites dans le tissu fondamental secondaire de la racine. Les éléments de l'assise pilifère ont une section tabulaire.

Genre Euterpe. — Les deux premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaine. La première feuille normale a un limbe bifide. La racine principale est accompagnée de racines latérales. Les fibres primitives de la région centrale du faisceau polyarque ont une section polygonale. On rencontre des massifs scléreux dans le liège interne de la racine. Les éléments de l'assise pilifère ont une section tabulaire.

Genre Howea. — Les deux premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaine. Le limbe de la première feuille normale est penné. La racine principale est accompagnée de racines latérales. Les fibres primitives de la région centrale du faisceau polyarque ont une section polygonale. On rencontre des massifs scléreux dans le liège interne et des sclérites dans le tissu fondamental secondaire de la racine. Les éléments de l'assise pilifère ont une section tabulaire.

Genre Nephrosperma. — Les trois premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaine. La première feuille normale a un limbe bifide. La racine principale est accompagnée de racines latérales. Les fibres primitives de la région centrale du faisceau polyarque ont une section polygonale. On rencontre des sclérites dans tout le tissu cortical de la racine. Les éléments de l'assise pilifère ont une section tabulaire.

Genre Hyophorbe. — Les trois premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaine. La première feuille normale a un limbe bifide. La racine principale est accompagnée de racines latérales. Les fibres primitives de la région centrale du faisceau polyarque ont une section polygonale. On

rencontre des sclérites dans tout le tissu cortical de la racine. Le tissu fondamental secondaire n'est pas encore épaissi. Certains éléments de l'assise pilifère sont prolongés en poils.

Genre Geonoma. — Les deux premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaine. La première feuille normale a une limbe bifide. La racine principale est accompagnée de racines latérales. Les fibres primitives de la région centrale du faisceau polyarque ont une section polygonale. On ne rencontre ni sclérites ni massifs scléreux dans le tissu cortical. L'anneau de tissu fondamental secondaire à parois minces est très étroit. Les éléments de l'assise pilifère ont une section tabulaire.

Genre Calyptronoma. — Les deux premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaine. La première feuille normale a un limbe bifide. La racine principale est accompagnée de racines latérales. Les fibres primitives de la région centrale du faisceau polyarque ont une section polygonale. On ne rencontre ni sclérites, ni massifs scléreux dans le tissu cortical de la racine. Les éléments de l'assise pilifère ont une section tabulaire. La gaine de la première feuille normale présente un faisceau dont l'orientation est singulière [1].

Genre Desmoncus. — Les deux premières feuilles gemmulaires sont réduites à leur gaine. La première feuille normale a un limbe qui possède une forme remarquable [2]. La racine principale est accompagnée de racines latérales. Les fibres primitives de la région centrale du faisceau polyarque ont une section polygonale. On ne rencontre ni sclérites, ni massifs scléreux dans le tissu cortical de la racine. Les éléments de l'assise pilifère ont une section tabulaire.

[1] Voy. p. 101.
[2] Voy. p. 101.

TABLE DES MATIÈRES.

EXPLICATION DES PLANCHES.

ABRÉVIATIONS.

As. p.	Assise pilifère.
As. s.	Assise subéreuse.
B.	Bois
C. e.	Croissant extérieur.
C. i.	Croissant intérieur.
Col.	Collenchyme.
End.	Endoderme.
Ép.	Épiderme.
Ép. e.	Épiderme extérieur.
Ép. i.	Épiderme intérieur.
F.	Faisceau.
1re f. g.	Première feuille gemmulaire.
2e f. g.	Deuxième feuille gemmulaire.
3e f. g.	Troisième feuille gemmulaire.
4e f. g.	Quatrième feuille gemmulaire.
F. m.	Faisceau médian.
F. p. s.	Fibres primitives sclérifiées.
F. s.	Fourreau scléreux.
G.	Graine.
L.	Liber.
L. a.	Lacune antérieure.
Lg. in.	Liège interne.
M. H.	Massif hypodermique.
Pé.	Péricambium.
Rg. b.	Région basilaire embrassante du cotylédon (gaine cotylédonaire).
Rg. c.	Région cylindrique cotylédonaire.
Rg. é.	Région élargie du cotylédon.
R. l.	Racine latérale.
R. p.	Racine principale.
S.	Sillon médian.
T. ch.	Tissu de charnière.
T. f.	Tissu fondamental.
T. f². n. s.	Tissu fondamental secondaire non sclérifié.
T. f². s.	Tissu fondamental secondaire sclérifié.
t'.	Trachée initiale.

Planche I.

FIG. 1 Germination du *Phœnix dactylifera* [1].

» 2 Germination du *Sabal umbraculifera*.

» 3 Germination du *Dictyosperma aureum*.

» 4 Section transversale pratiquée vers le milieu de la longueur de la racine principale du P. *dactylifera*.

» 5 Section transversale d'ensemble pratiquée dans la région cylindrique du cotylédon du P. *dactylifera*.

» 6 et 7 Sections transversales d'ensemble pratiquées vers le milieu de la longueur de la première et de la seconde feuilles gemmulaires du P. *dactylifera*.

Planche II.

FIG. 1. Section transversale d'ensemble des trois premières feuilles gemmulaires du *Caryota sobolifera*, pratiquée vers le milieu de la longueur de la première.

» 2. Section transversale d'ensemble de la première feuille gemmulaire du *Chamærops humilis*, var. *tomentosa*.

» 3. Fragment de l'épiderme extérieur de la seconde feuille gemmulaire de la même plante, montrant un stomate.

» 4. Portion d'une section transversale de cette feuille.

» 5. Germination du *Livistona australis*.

» 6. Section transversale d'ensemble des trois premières feuilles gemmulaires du *Livistona australis*, pratiquée vers le milieu de la longueur de la première.

[1] Le grossissement réel est indiqué à côté de chaque figure. Lorsqu'il n'est pas mentionné, c'est que le dessin est à peu près de même grandeur que l'objet.

Planche III.

Fig. 1. Germination du *Latania Loddigesii.*

» 2. Section transversale d'ensemble des deux premières feuilles gemmulaires du *Latania Loddigesii,* pratiquée vers le milieu de la longueur de la première.

» 3. Section transversale pratiquée vers le milieu de la longueur de la racine principale du *Sabal umbraculifera.*

» 4. Section transversale d'ensemble pratiquée près de l'insertion du cylindre cotylédonaire sur la gaine du *S. umbraculifera.*

» 5. Fragment de l'épiderme extérieur de la gaine cotylédonaire du *S. umbraculifera.*

» 6. Section transversale d'un faisceau du cylindre cotylédonaire chez le *S. umbraculifera.*

Planche IV.

Fig. 1. Section transversale d'ensemble des deux premières feuilles gemmulaires du *Washingtonia filifera,* pratiquée vers le milieu de la longueur de la première.

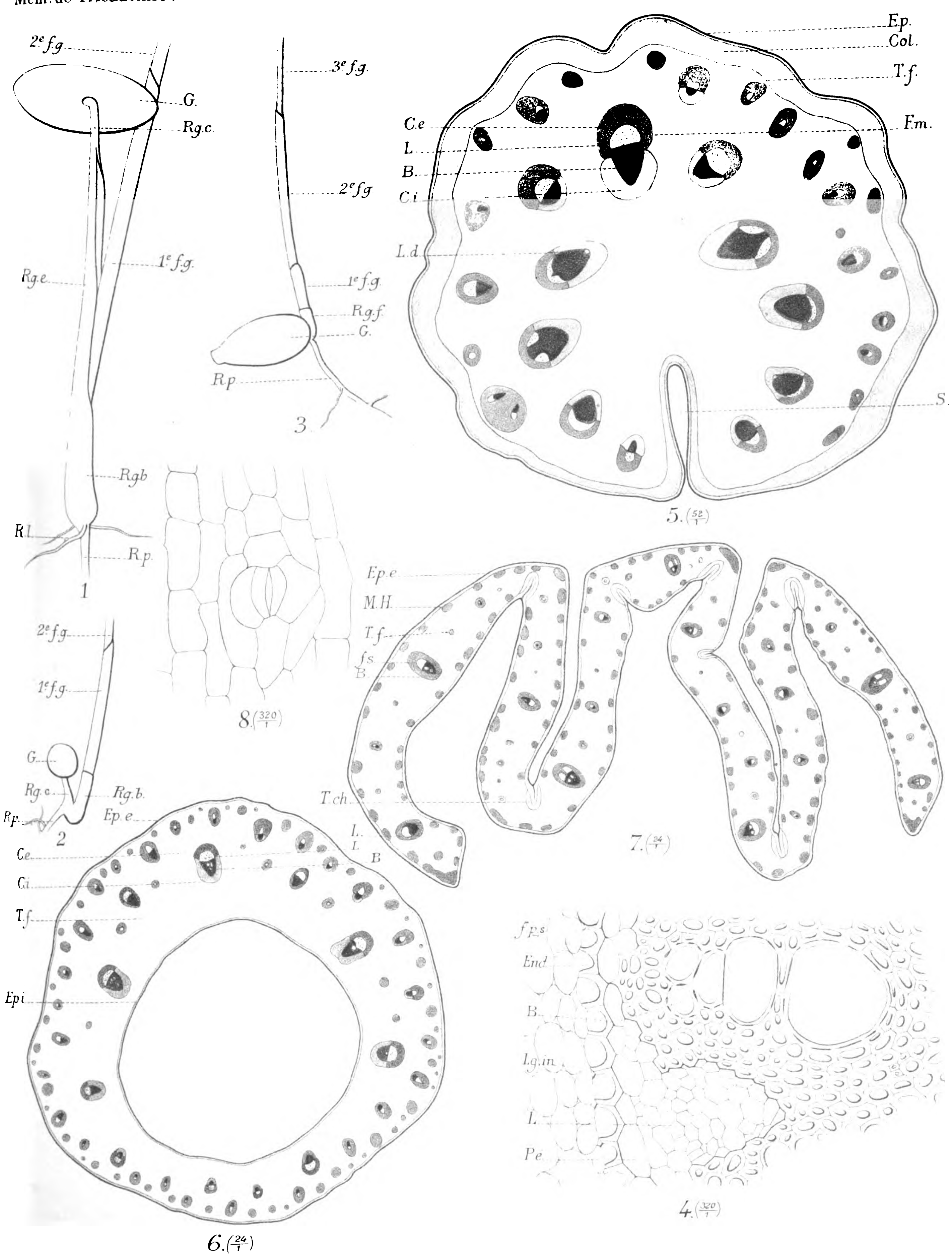
» 2. Germination du *Pritchardia pacifica.*

» 3. Germination du *P. macrocarpa.*

» 4. Germination du *Kentia exorhiza.*

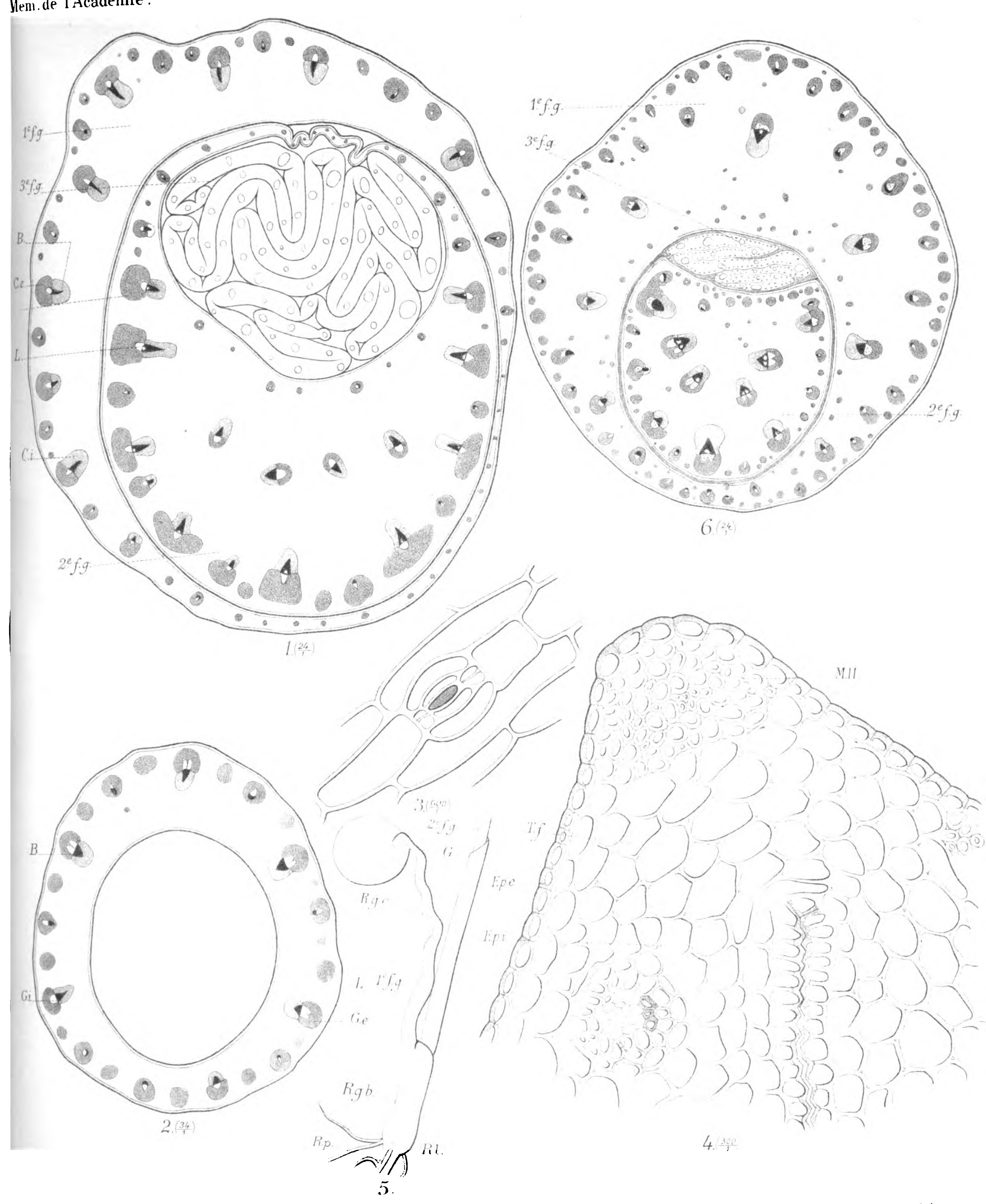
» 5. Limbe de la première feuille gemmulaire d'un *Desmoncus* brésilien.

» 6. Section transversale d'ensemble de la deuxième, de la troisième et de la quatrième feuille gemmulaires d'un *Desmoncus* brésilien, pratiquée vers le milieu de la longueur de la deuxième.



Dr Henri Micheels ad nat. del.

Lith. G. Severeyns



Lith. G. Severeyns

Rgc.
1e fg.
G.
Rge.
Rb.
R.l.
1

5. (600/1)

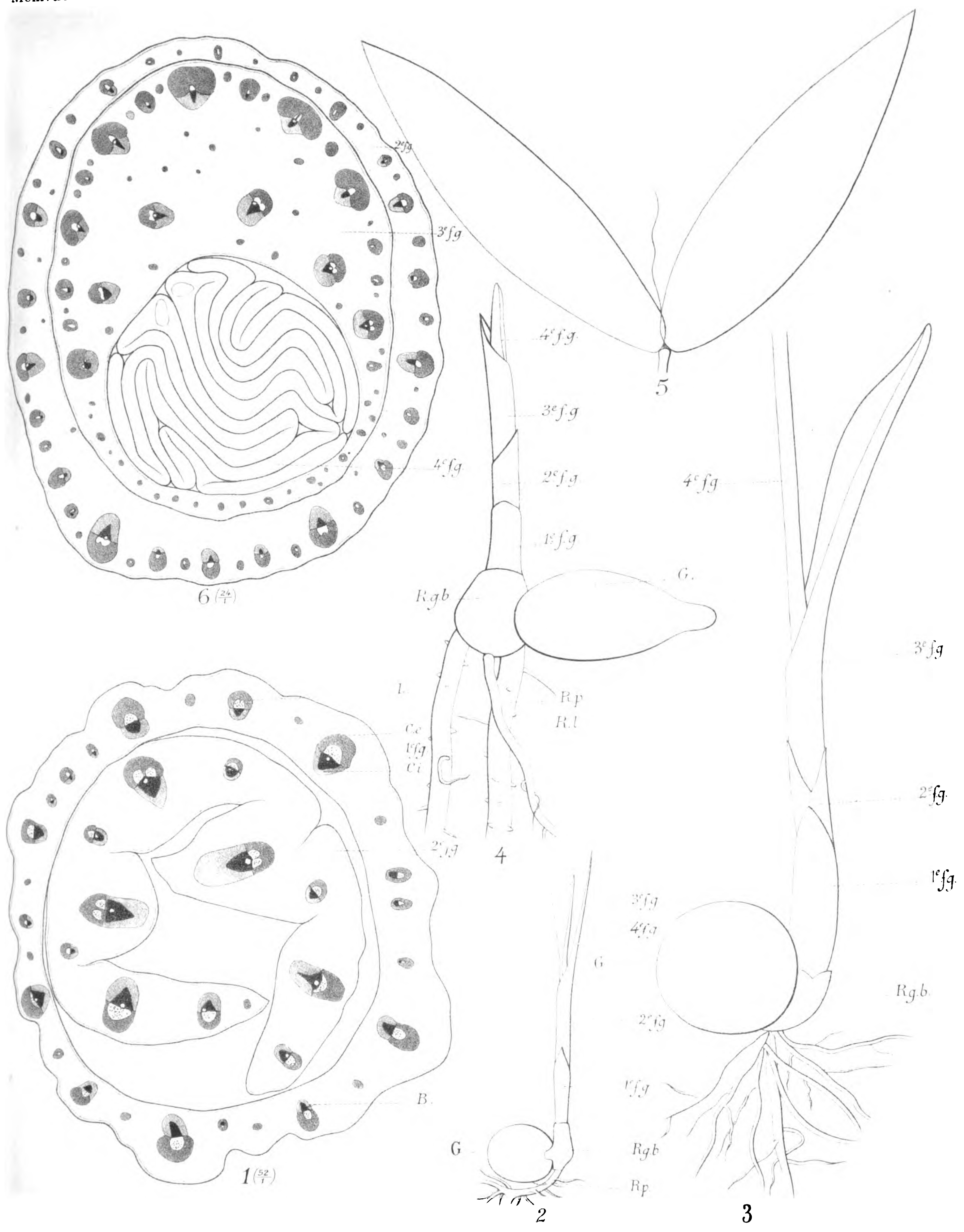
Tf
Ge
L
B
P
6 (240/1)

F
Epe
2e fg
Epi
1e fg
4 (34/1)

Ge
L
B
Ci
Tf
1e fg
2e fg.
2. (24/1)

As.p.
As.s.
Tf²s
Tf²n.s.
Lg.int.
3 (435/1)

Lith. G. Sev...


2e fg
3e fg
4e fg
6 (24/1)
5
4e f.g
3e f.g
2e f.g
1e f.g
G.
R.g.b
L.
R.p
R.l
Ce
1e fg
Ci
2e fg
4
B.
1 (52/1)
4e fg
3e fg
2e fg
1e fg
3e fg
4e fg
G
Rg.b.
2e fg
1e fg
G
Rgb
Rp
2
3

NOUVELLES RECHERCHES

SUR QUELQUES FORMULES

DE

CALCUL INTÉGRAL,

PAR

J. BEAUPAIN,

INGÉNIEUR AU CORPS DES MINES,
DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES.

(Mémoire présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 3 novembre 1888.)

NOUVELLES RECHERCHES

SUR QUELQUES FORMULES

DE

CALCUL INTÉGRAL.

Dans un autre travail présenté à l'Académie de Belgique *, nous avons démontré les formules suivantes :

$$(1) \quad . \; . \; . \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \sin q\varphi d\varphi = -\frac{\cos(q-p)\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} B\left(\frac{q-p}{2}, p+1\right) + \frac{P}{2^{p+1}},$$

$$(2) \left\{ \begin{aligned} A_{r,s,q} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \cos q\varphi d\varphi \\ &= -\frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}} B\left(\frac{q-s-r}{2}, r+1, s+1\right) + \frac{\sin(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}} B\left(\frac{q-s-r}{2}, s+1, r+1\right), \end{aligned} \right.$$

$$(3) \left\{ \begin{aligned} B_{r,s,q} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \sin q\varphi d\varphi \\ &= \frac{\cos r\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}} B\left(\frac{q-s-r}{2}, r+1, s+1\right) - \frac{\cos(q-s)\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}} B\left(\frac{q-s-r}{2}, s+1, r+1\right), \end{aligned} \right.$$

* Voir le mémoire intitulé : *Sur quelques formules de Calcul intégral*, tome LI des *Mémoires cour. et des sav. étrangers*.

$$(4) \quad \ldots \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \cos(s+r)\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{s+r+1}} \cos r\frac{\pi}{2} + \frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}} \beta(r,s),$$

$$(5) \quad \ldots \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \sin(s+r)\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{s+r+1}} \sin r\frac{\pi}{2} - \frac{\cos r\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}} \beta(r,s),$$

où nous posons, pour abréger,

$$\mathrm{P} = \int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p dx,$$

$$\mathrm{B}\left(\frac{q-s-r}{2}, r+1, s+1\right) = \int_0^1 x^{\frac{q-s-r}{2}-1}(1-x)^r(1+x)^s dx,$$

$$\beta(r,s) = \int_0^1 \frac{(1+x)^r(1-x)^s - (1-x)^r(1+x)^s}{x} dx.$$

Si, par un procédé différent de celui dont il a été fait usage, on parvenait à déterminer les valeurs des intégrales contenues dans les premiers membres des équations (1), (2), (3), (4) et (5), on aurait, par cela même, calculé les transcendantes P, B, et $\beta(r, s)$. En particulier, si l'on avait ramené les intégrales trigonométriques aux fonctions eulériennes, on aurait résolu le problème que nous proposons, savoir : la détermination des transcendantes P, B et $\beta(r, s)$.

I.

Réduction de la transcendante $\int_0^1 x^{\frac{p-q}{2}-1}(1+x)^p dx$
aux intégrales eulériennes.

1. Soit d'abord $p > -1$. J'ai montré que, si $q = 0$, cette transcendante est réductible aux intégrales eulériennes.

On a

$$(6) \quad \ldots \quad \int_0^1 \frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{(1+x)^p} dx = \cos p\frac{\pi}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma(1-p)}{\Gamma\left(1-\frac{p}{2}\right)}. \qquad 1 > p > 0.$$

D'ailleurs cette intégrale est connue, quel que soit le nombre p, si l'on observe que

$$B(p,q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}+x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}} dx;$$

donc

$$(7) \quad \ldots \ldots \quad \int_0^1 \frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{(1+x)^p} dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right) \qquad p > 0.$$

Généralement, si q est un nombre entier, le premier membre de l'équation (1) est connu; il en sera donc de même du second.

Soit, pour fixer les idées, $q = 2a$. (a entier.)

On a

$$\sin 2a\varphi = \sum_{m=0}^{m=a-1} \binom{2a}{2m+1} i^{2m} \cos^{2a-2m-1}\varphi \sin^{2m+1}\varphi,$$

i représentant $\sqrt{-1}$.

En conséquence,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \sin 2a\varphi d\varphi = \sum_{m=0}^{m=a-1} \binom{2a}{2m+1} i^{2m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+2a-2m-1}\varphi \sin^{2m+1}\varphi d\varphi.$$

Posons $\sin\varphi = \sqrt{x}$; d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \sin 2a\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{m=a-1} \binom{2a}{2m+1} i^{2m} \int_0^1 x^m (1-x)^{\frac{p}{2}+a-m-1} dx,$$

ou bien

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \sin 2a\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{m=a-1} \binom{2a}{2m+1} i^{2m} \frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma\left(\frac{p}{2}+a-m\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+a+1\right)}.$$

Mais

$$\Gamma\left(\frac{p}{2}+a+1\right) = \left(\frac{p}{2}+a\right)\left(\frac{p}{2}+a-1\right)\dots\left(\frac{p}{2}+a-m\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}+a-m\right);$$

donc

$$\frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma\left(\frac{p}{2}+a-m\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+a+1\right)} = \frac{1.2.3\dots m}{(p+2a)(p+2a-2)\dots(p+2a-2m)} 2^{m+1}.$$

Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi \sin 2a\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{m=a-1} \binom{2a}{2m+1} i^{2m} \frac{1.2.3\dots m}{(p+2a)(p+2a-2)\dots(p+2a-2m)} 2^{m+1}.$$

Si nous reportons cette valeur dans l'équation (1), il viendra,

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^1 x^{\frac{2a-p}{2}-1}(1+x)^p dx = (-1)^a \cos p\frac{\pi}{2}\, \mathrm{B}\left(\frac{2a-p}{2}, p+1\right) \\ &+ 2^p \sum_{m=0}^{m=a-1} \binom{2a}{2m+1} i^{2m} \frac{1.2.3\dots m}{(p+2a)(p+2a-2)\dots(p+2a-2m)} 2^{m+1}, \end{aligned} \right.$$

pourvu que l'on ait

$$2a - p > 0, \qquad p > -1.$$

Semblablement,

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^1 x^{\frac{2a+1-p}{2}-1}(1+x)^p dx = (-1)^a \sin p\frac{\pi}{2}\, \mathrm{B}\left(\frac{2a+1-p}{2}, p+1\right) \\ &+ 2^r \sum_{m=0}^{m=a} \binom{2a+1}{2m+1} i^{2m} \frac{1.2.3\ldots m}{(p+2a+1)(p+2a-1)\ldots(p+2a+1-2m)} 2^{m+1}, \end{aligned} \right.$$

avec les conditions

$$2a + 1 - p > 0, \qquad p > -1.$$

Ainsi l'intégrale $\int_0^1 x^{r-1}(1+x)^p dx$ sera immédiatement connue, si r et p satisfont à l'égalité

$$a = p + 2r. \qquad (a \text{ entier.})$$

En conséquence,

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^1 \frac{x^{r-1}}{(1+x)^{2r-2a}} dx = \cos r\pi \frac{\Gamma(r)\,\Gamma(2a-2r+1)}{\Gamma(2a-r+1)} \\ &+ \frac{1}{2^{2r-2a}} \sum_{m=0}^{m=a-1} \binom{2a}{2m+1} i^{2m} \frac{1.2.3\ldots m}{(2a-r)(2a-r-1)\ldots(2a-r-m)}, \end{aligned} \right.$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^1 \frac{x^{r-1}}{(1+x)^{2r-2a-1}} dx = \cos r\pi \frac{\Gamma(r)\,\Gamma(2a-2r+2)}{\Gamma(2a-r+2)} \\ &+ \frac{1}{2^{2r-2a-1}} \sum_{m=0}^{m=a} \binom{2a+1}{2m+1} i^{2m} \frac{1.2.3\ldots m}{(2a+1-r)(2a-r)\ldots(2a+1-r-m)}. \end{aligned} \right.$$

2. En second lieu, considérons l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^{r-1}}{(1+x)^p} dx,$$

p étant un nombre quelconque.

Nous montrerons bientôt que si r et p vérifient l'égalité

$$a = -p + 2r,$$

la transcendante $\int_0^1 \frac{x^{r-1}}{(1+x)^{2r-a}}\,dx$ est réductible aux intégrales eulériennes.

3. Dans ses *Exercices de calcul intégral*, tome II, p. 157, l'illustre Legendre traite cette transcendante de la manière suivante.

De l'identité :

$$\frac{d}{dx}\frac{x^r}{(1+x)^n}\,dx = \frac{(r-n)x^{r-1}}{(1+x)^n} + n\frac{x^{r-1}}{(1+x)^{n+1}},$$

il tire

$$\frac{1}{2^n} = (r-n)\int_0^1 \frac{x^{r-1}}{(1+x)^n}\,dx + n\int_0^1 \frac{x^{r-1}}{(1+x)^{n+1}}\,dx,$$

ou

$$(12) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{2^n} = (r-n)\,Q(n) + n\,Q(n+1),$$

si l'on pose

$$Q(n) = \int_0^1 \frac{x^{r-1}}{(1+x)^n}\,dx.$$

Pour trouver l'intégrale $Q(2r-k)$, on a, d'après la formule (12),

$$(1-r)\,Q(2r-1) = 2^{1-2r} + (1-2r)\,Q(2r),$$

$$(2-r)\,Q(2r-2) = 2^{2-2r} + (2-2r)\,Q(2r-1),$$

. . . .

Ainsi toutes ces intégrales seront connues d'après la valeur de

$$Q(2r) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma^2(r)}{\Gamma(2r)}.$$

II.

Réduction de la transcendante $\beta(r,s) = \int_0^1 \frac{(1+x)^r(1-x)^s - (1-x)^r(1+x)^s}{x}dx$ *aux intégrales eulériennes.*

4. Reprenons les formules (4) et (5):

$$A_{r,s,s+r} = \frac{\pi}{2^{s+r+1}}\cos r\frac{\pi}{2} + \frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}}\beta(r,s),$$

$$B_{r,s,s+r} = \frac{\pi}{2^{s+r+1}}\sin r\frac{\pi}{2} - \frac{\cos r\frac{\pi}{2}}{2^{s+r+1}}\beta(r,s).$$

Elles supposent

$$s > -1, \quad r > -1;$$

on en déduit l'égalité

(13) . . . . . . $\cos r\frac{\pi}{2}A_{r,s,s+r} + \sin r\frac{\pi}{2}B_{r,s,s+r} = \frac{\pi}{2^{s+r+1}}.$

En particulier, si $s + r = 0$,

$$\cos r\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}^r\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2},$$

où l'on suppose

$$1 > r > -1.$$

Posons $\sin\varphi = \sqrt{x}$; il viendra

$$\cos r\frac{\pi}{2}\int_0^1 x^{\frac{r-1}{2}}(1-x)^{-\frac{1+r}{2}}dx = \pi,$$

c'est-à-dire

$$(14) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \cos r\frac{\pi}{2}\,\Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right)=\pi.$$

Comme on le vérifie aisément, cette formule ne diffère qu'en apparence de celle d'Euler.

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

5. Dans le mémoire cité plus haut, nous avons montré, chose évidente d'ailleurs, que la transcendante $\beta(r, s)$ est réductible aux intégrales eulériennes, si

$$s-r=\pm a. \qquad (a \text{ entier.})$$

Nous allons prouver qu'il en est de même quand

$$s+r=a.$$

6. Examinons d'abord le cas particulier de $s+r=0$. En vertu de l'équation (4),

$$(15) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \int_0^1 \frac{(1+x)^{2r}-(1-x)^{2r}}{x(1-x^2)^r}\,dx=\pi\,\mathrm{tg}\,r\frac{\pi}{2},$$

où l'on suppose

$$1>r>-1.$$

Développant, en série, le premier membre de l'équation (15), on trouve :

$$(16) \quad \sqrt{\pi}\,\mathrm{tg}\,r\frac{\pi}{2}=\frac{\Gamma(1-r)}{\Gamma\left(\frac{3-2r}{2}\right)}\left[\sum_{m=0}^{m=\infty}\binom{2r}{2m+1}\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{(3-2r)(5-2r)\ldots(2m+1-2r)}\right].$$

Cette formule donne le développement de $\mathrm{tg}\,r\frac{\pi}{2}$ en série convergente, à termes alternativement positifs et négatifs.

La formule (15) ne diffère pas de celle de M. Catalan (*Mélanges mathématiques*, t. III, p. 228).

En effet, posant

$$\frac{1+x}{1-x}=\sqrt{\alpha},$$

on a

$$\operatorname{tg} r\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{\alpha^{\frac{r}{2}}-\alpha^{-\frac{r}{2}}}{\alpha-1}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}.$$

Puis, en faisant $r\frac{\pi}{2}=x$ et en changeant α en $\frac{1}{\alpha}$,

$$\operatorname{tg} x=\frac{1}{\pi}\int_0^{1}\frac{\alpha^{-\frac{x}{\pi}}-\alpha^{\frac{x}{\pi}}}{1-\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}.$$

Comme le fait remarquer M. Catalan, cette formule ne diffère qu'en apparence de la célèbre formule due à Euler :

$$(17) \qquad \operatorname{tg} x=2\int_0^{\infty}\frac{e^{2\beta x}-e^{-2\beta x}}{e^{\pi\beta}-e^{-\pi\beta}}d\beta.$$

7. Généralement, soit $s+r=2a$ (a entier).

On a

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^r\varphi\cos^{2a-r}\varphi\sin 2a\varphi d\varphi=\frac{\pi}{2^{2a+1}}\sin r\frac{\pi}{2}-\frac{\cos r\frac{\pi}{2}}{2^{2a+1}}B(r, 2a-r).$$

Mais

$$A=\sum_{m=0}^{m=a-1}\binom{2a}{2m+1}i^{2m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{r+2m+1}\varphi\cos^{4a-2m-r-1}\varphi d\varphi,$$

ou, en posant $\sin\varphi=\sqrt{x}$,

$$A=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{m=a-1}\binom{2a}{2m+1}i^{2m}\int_0^{1}x^{\frac{r}{2}+m}(1-x)^{2a-m-\frac{r}{2}-1}dx;$$

c'est-à-dire

$$A = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{m=a-1}\binom{2a}{2m+1} i^{2m}\frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+m+1\right)\Gamma\left(2a-m-\frac{r}{2}\right)}{\Gamma(2a+1)}.$$

On sait que

$$\Gamma\left(\frac{r}{2}+m+1\right) = \left(\frac{r}{2}+m\right)\left(\frac{r}{2}+m-1\right)\ldots\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right),$$

et que

$$\Gamma\left(2a-\frac{r}{2}\right) = \left(2a-1-\frac{r}{2}\right)\left(2a-2-\frac{r}{2}\right)\ldots\left(2a-m-\frac{r}{2}\right)\Gamma\left(2a-m-\frac{r}{2}\right);$$

en conséquence,

$$A = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(2a-\frac{r}{2}\right)}{\Gamma(2a+1)}\left[\sum_{m=0}^{m=a-1}\binom{2a}{2m+1} i^{2m}\frac{(r+2m)(r+2m-1)\ldots(r+2)}{(4a-r-2m)(4a-r-2m-2)\ldots(4a-r-2)}\right].$$

Par substitution de cette valeur dans l'équation (5), il viendra

$$(18)\left\{\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{(1+x)^{2r}(1-x)^{2a}-(1-x)^{2r}(1+x)^{2a}}{x(1-x^2)^r}dx = \pi \operatorname{tg} r\frac{\pi}{2}\\ &-2^{2a}\frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(2a-\frac{r}{2}\right)}{\cos r\frac{\pi}{2}\,\Gamma(2a+1)}\left[\sum_{m=0}^{m=a-1}\binom{2a}{2m+1} i^{2m}\left[\frac{(r+2)(r+4)\ldots(r+2m)}{(4a-r-2)(4a-r-4)\ldots(4a-r-2m)}\right]\right],\end{aligned}\right.$$

r satisfaisant aux inégalités

$$r > -1, \quad 2a > r-1.$$

Semblablement,

$$(19)\left\{\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{(1+x)^{2r}(1-x)^{2a+1}-(1-x)^{2r}(1+x)^{2a+1}}{x(1-x^2)^r}dx = \pi \operatorname{tg} r\frac{\pi}{2}\\ &-2^{2a+1}\frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(2a+1-\frac{r}{2}\right)}{\cos r\frac{\pi}{2}\,\Gamma(2a+2)}\left[\sum_{m=0}^{m=a}\binom{2a+1}{2m+1} i^{2m}\frac{(r+2)(r+4)\ldots(r+2m)}{(4a-r)(4a-r-2)\ldots(4a+2-r-2m)}\right],\end{aligned}\right.$$

pourvu que l'on ait

$$r > 1, \quad 2a + 1 > r - 1.$$

Si r est compris entre 0 et 1, les formules (18) et (19) deviennent

$$(20) \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{(1+x)^{2r}(1-x)^{2a} - (1-x)^{2r}(1+x)^{2a}}{x(1-x^2)^r}\,dx = \pi \operatorname{tg} r\frac{\pi}{2} \\ \displaystyle - \frac{(4a-2-r)(4a-4-r)\ldots(2-r)}{1.2.3\ldots 2a}\,\frac{2\pi r}{\sin r\pi}\left[\sum_{m=0}^{m=a-1}\left(\frac{2a}{2m+1}\right) i^{2m}\,\frac{(r+2)(r+4)\ldots(r+2m)}{(4a-r-2)(4a-r-4)\ldots(4a-r-2m)}\right]. \end{cases}$$

$$(21) \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{(1+x)^{2r}(1-x)^{2a+1} - (1-x)^{2r}(1+x)^{2a+1}}{x(1-x^2)^r}\,dx = \pi \operatorname{tg} r\frac{\pi}{2} \\ \displaystyle - \frac{(4a-r)(4a-r-2)\ldots(2-r)}{1.2.3\ldots(2a+1)}\,\frac{2\pi r}{\sin r\pi}\left[\sum_{m=0}^{m=a}\binom{2a+1}{2m+1} i^{2m}\,\frac{(r+2)(r+4)\ldots(r+2m)}{(4a-r)(4a-r-2)\ldots(4a+2-r-2m}\right]. \end{cases}$$

8. Remarque. — Si r est un nombre impair, le dénominateur, dans le second membre des équations (20) et (21), est nul; il doit donc en être de même du numérateur. Pour trouver la vraie valeur de $\beta(r, s)$, il faut recourir à l'équation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r\varphi \cos^s\varphi \cos(s+r)\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{s+r+1}} \cos r\frac{\pi}{2} + \frac{\sin r\frac{\pi}{2}}{2^{r+s+1}}\,\beta(r, s).$$

Soient donc

$$r = 2b + 1, \quad s = 2a - 2b - 1 \quad \text{et} \quad a > b,$$

on a

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^{2b+1}(1-x)^{2a-2b-1} - (1-x)^{2b+1}(1+x)^{2a-2b-1}}{x}\,dx = (-1)^b 2^{2a+1}\mathrm{P},$$

en posant, pour abréger

$$\mathrm{P} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2b+1}\varphi \cos^{2a-b-1}\varphi \cos 2a\varphi\, d\varphi.$$

Or,

$$\cos 2a\varphi = \sum_{m=0}^{m=a}\binom{2a}{2m} i^{2m} \cos^{2a-2m} \sin^{2m}\varphi,$$

donc

$$P=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{m=a}\binom{2a}{2m}i^{2m}\int_0^1 x^{b+m}(1-x)^{2a-b-m-1}dx\,;$$

ou

$$P=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{m=a}\binom{2a}{2m}i^{2m}\frac{\Gamma(b+m+1)\Gamma(2a-b-m)}{\Gamma(2a+1)}.$$

Or,

$$\Gamma(b+m+1)=(b+m)(b+m-1)\dots(b+1)\Gamma(b+1),$$

et

$$\Gamma(2a-b)=(2a-b-1)(2a-b-2)\dots(2a-b-m)\Gamma(2a-b-m);$$

d'où

$$P=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(b+1)\Gamma(2a-b)}{\Gamma(2a+1)}\sum_{m=0}^{m=a}\binom{2a}{2m}i^{2m}\frac{(b+1)(b+2)\dots(b+m)}{(2a-b-1)(2a-b-2)\dots(2a-b-m)};$$

et, par suite,

$$(22)\left\{\begin{aligned}&\int_0^1\frac{(1+x)(1-x)^{2a-2b-1}-(1-x)^{2b+1}(1+x)^{2a-2b-1}}{x}dx\\&=(-1)^b 2^{2a}\frac{\Gamma(b+1)\Gamma(2a-b)}{\Gamma(2a+1)}\sum_{m=0}^{m=a}\binom{2a}{2m}i^{2m}\frac{(b+1)(b+2)\dots(b+m)}{(2a-b-1)(2a-b-2)\dots(2a-b-m)}.\end{aligned}\right.$$

9. Application. — Soient, par exemple, $a=2$ et $b=1$. La formule (22) devient

$$\int_0^1\frac{(1+x)^3(1-x)-(1-x)^3(1+x)}{x}dx=-\frac{2^4.1.2}{1.2.3.4}\sum_{m=0}^{m=2}\binom{4}{2m}i^{2m}\frac{2.3.4\dots(m+1)}{2.3.4\dots(3-m)}=\frac{8}{3}.$$

Effectivement,

$$\int_0^1\frac{(1+x)^3(1-x)-(1-x)^3(1+x)}{x}dx=4\int_0^1(1-x^2)\,dx=\frac{8}{3}.$$

10. La combinaison des formules (15), (18) et (19) nous donnera immédiatement une nouvelle série d'intégrales définies.

Exemples. — I. Pour $a = 0$, la formule (19) devient

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^{2r}-(1-x)^{2r}}{x(1-x^2)^r}dx - \int_0^1 \frac{(1+x)^{2r}+(1-x)^{2r}}{(1-x^2)^r}dx = \pi \operatorname{tg} r\frac{\pi}{2} - 2\frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)}{\cos r\frac{\pi}{2}},$$

ou

$$(23) \quad \ldots \quad \int_0^1 \frac{(1+x)^{2r}+(1-x)^{2r}}{(1-x^2)^r}dx = 2\frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)}{\cos r\frac{\pi}{2}},$$

où nous supposons

$$1 > r > -1.$$

Comme cette intégrale est symétrique, par rapport aux valeurs de r comprises entre -1 et $+1$, exclusivement, on peut écrire

$$(24) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 \frac{(1+x)^{2r}+(1-x)^{2r}}{(1-x^2)^r}dx = \frac{2\pi r}{\sin \pi r}, \\ 1 > r \geqq 0. \end{array} \right.$$

La transformation employée précédemment conduit à la formule

$$(25) \quad \ldots\ldots \quad \int_0^\infty \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{\left(e^{\frac{\pi\alpha}{2}} + e^{\frac{-\pi\alpha}{2}}\right)^2} d\alpha = \frac{x}{\pi \sin x},$$

pourvu que l'on ait

$$\pi > x > 0.$$

II. Pour $a = 1$, la formule (18) se transforme en

$$-2\int_0^1 \frac{(1+x)^{2r}+(1-x)^{2r}}{(1-x^2)^r}dx + \int_0^1 x\frac{(1+x)^{2r}-(1-x)^{2r}}{(1-x^2)^r}dx = -4\frac{\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)}{\cos r\frac{\pi}{2}};$$

ou bien

$$(26) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 x\frac{(1+x)^{2r}-(1-x)^{2r}}{(1-x^2)^r}dx = 2\pi\frac{r^2}{\sin \pi r}, \\ 1 > r \geqq 0. \end{array} \right.$$

III. De même, on trouve

$$(27) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 x^2 \frac{(1+x)^{2r} + (1-x)^{2r}}{(1-x^2)^r}\, dx = \left(\frac{2+4r^2}{3}\right) \frac{\pi r}{\sin r\pi}, \\ \qquad\qquad 1 > r \geqq 0. \end{array} \right.$$

11. Généralement, ce procédé donnera les valeurs des intégrales

$$\int_0^1 x^{2m} \frac{(1+x)^{2r} + (1-x)^{2r}}{(1-x^2)^r}, \qquad \int_0^1 x^{2m+1} \frac{(1+x)^{2r} - (1-x)^{2r}}{(1-x^2)^r}\, dx,$$

pour r variant entre les limites 0 et 1.

Si r est commensurable, on peut, dans chaque cas particulier, trouver l'intégrale indéfinie de ces fonctions; mais la méthode directe, dans la plupart des cas, conduit à des calculs inextricables.

Ainsi, soit

$$\int \frac{(1+x)^{2r} - (1-x)^{2r}}{x(1-x^2)^r}\, dx = \int \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^r \frac{dx}{x} - \int \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^r \frac{dx}{x},$$

où nous supposons

$$r = \frac{m}{n}. \qquad (m \text{ et } n \text{ entiers}).$$

En posant successivement

$$\left(\frac{1-x}{1-x}\right)^{\frac{1}{n}} = z, \quad \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{n}} = u,$$

on trouve

$$A = \int \frac{(1+x)^{\frac{2m}{n}} - (1-x)^{\frac{2m}{n}}}{x(1-x^2)^{\frac{m}{n}}}\, dx = 2n \int \frac{z^{m+n-1}}{z^{2n}-1}\, dz - 2n \int \frac{u^{m+n-1}}{u^{2n}-1}\, du.$$

Application. — Si $m = 1$ et $n = 3$, on trouve, toutes réductions faites,

$$\int \left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}}\right] \frac{dx}{x} = -\lg \left[\frac{(1-x)^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{2(1+x)^{\frac{1}{3}} + (1-x)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}}\right)^2}{(1+x)^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{2(1-x)^{\frac{1}{3}} + (1+x)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}}\right)^2}\right]$$

$$-\sqrt{3} \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{\sqrt{3}}{1 + 2\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{2}{3}}}\right] + \sqrt{3} \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{\sqrt{3}}{1 + 2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{2}{3}}}\right] + \text{const.};$$

donc

$$\int_0^1 \left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\frac{dx}{x} = \sqrt{3}\,\text{arc tg}\,\sqrt{3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}},$$

résultat conforme à celui de la formule (15).

III.

Réduction de la transcendante B$(p, r+1, s+1)$ *aux intégrales eulériennes.*

12. En premier lieu, nous supposons que les exposants s, r et p satisfont aux inégalités

$$p > 0, \quad r > -1, \quad s > -1$$

Nous savons que si s et r satisfont à l'une des conditions

$$s = r, \quad s = a, \quad s = r \pm a, \qquad (a \text{ entier})$$

la transcendante B$(p, r+1, s+1)$ se ramène immédiatement aux intégrales eulériennes.

13. Cette fonction sera encore exprimable, au moyen des mêmes intégrales, dans le cas de

$$2p + s + r = a. \qquad (a \text{ entier})$$

En effet, des formules (1) et (2), on déduit

$$\text{(28)} \qquad \text{B}\left(\frac{q-s-r}{2}, r+1, s+1\right) = 2^{s+r+1}\,\frac{\cos(q-s)\frac{\pi}{2}\,\text{A}_{r,s,q} + \sin(q-s)\frac{\pi}{2}\,\text{B}_{r,s,q}}{\sin(q-s-r)\frac{\pi}{2}},$$

$$\text{(29)} \qquad \text{B}\left(\frac{q-s-r}{2}, s+1, r+1\right) = 2^{s+r+1}\,\frac{\cos r\frac{\pi}{2}\,\text{A}_{r,s,q} + \sin r\frac{\pi}{2}\,\text{B}_{r,s,q}}{\sin(q-s-r)\frac{\pi}{2}}.$$

14. Si q est entier, ces fonctions, que M. Catalan appelle *ultra-eulériennes,* sont réductibles aux intégrales eulériennes.

Soit, pour fixer les idées, $q = 2a$. On a

$$\cos 2a\varphi = \sum_{m=0}^{m=a} \binom{2a}{2m} i^{2m} \cos^{2a-2m}\varphi \sin^{2m}\varphi,$$

$$\sin 2a\varphi = \sum_{m=0}^{m=a-1} \binom{2a}{2m+1} i^{2m} \cos^{2a-2m-1}\varphi \sin^{2m+1}\varphi;$$

d'où

$$A_{r,s,2a} = \sum_{m=0}^{m=a} \binom{2a}{2m} i^{2m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r+2m}\varphi \cos^{2a-2m+s}\varphi d\varphi,$$

$$B_{r,s,2a} = \sum_{m=0}^{m=a-1} \binom{2a}{2m+1} i^{2m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r+2m+1}\varphi \cos^{s+2a-2m+1}\varphi d\varphi.$$

Posons $\sin\varphi = \sqrt{x}$; il viendra

$$A_{r,s,2a} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{m=a} \binom{2a}{2m} i^{2m} \int_0^1 x^{m+\frac{r-1}{2}} (1-x)^{a-m+\frac{s-1}{2}} dx,$$

$$B_{r,s,2a} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{m=a-1} \binom{2a}{2m+1} i^{2m} \int_0^1 x^{\frac{r}{2}+m} (1-x)^{\frac{s}{2}+a-m+1} dx;$$

c'est-à-dire

$$A_{r,s,2a} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{m=a} \binom{2a}{2m} i^{2m} \frac{\Gamma\left(m+\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(a-m+\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{s+r}{2}+1\right)},$$

$$B_{r,s,2a} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{m=a-1} \binom{2a}{2m+1} i^{2m} \frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+m+1\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+a-m\right)}{\Gamma\left(a+\frac{s+r}{2}+1\right)}.$$

Mais

$$\Gamma\left(m+\frac{r+1}{2}\right) = \left(m-1+\frac{r+1}{2}\right)\left(m-2+\frac{r+1}{2}\right)\cdots\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right),$$

$$\Gamma\left(a+\frac{s+1}{2}\right) = \left(a-1+\frac{s+1}{2}\right)\left(a-2+\frac{s+1}{2}\right)\cdots\left(a-m+\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(a-m+\frac{s+1}{2}\right);$$

par suite,

$$A_{r,s,2a}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(a+\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{s+r}{2}\right)}\left[\sum_{m=0}^{m=a}\binom{2a}{2m}i^{2m}\frac{(r+1)(r+3)\ldots(r+2m-1)}{(s+2a-1)(s+2a-3)\ldots(s+2a-2m+1)}\right],$$

$$B_{r,s,2a}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+a\right)}{\Gamma\left(a+\frac{s+r}{2}+1\right)}\left[\sum_{m=1}^{m=a-1}\binom{2a}{2m+1}i^{2m}\frac{(r+2)(r+4)\ldots(r+2m)}{(s+2a-2)(s+2a-4)\ldots(s+2a-2m)}\right],$$

formules, que nous pouvons encore écrire :

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} A_{r,s,2a}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{s+r}{2}\right)}\frac{(s+2a-1)(s+2a-3)\ldots(s+1)}{(s+r+2a)(s+r+2a-2)\ldots(s+r+2)}\\ \left[\sum_{m=0}^{m=a}\binom{2a}{2m}i^{2m}\frac{(r+2m-1)(r+2m-3)\ldots(r+1)}{(s+2a-1)(s+2a-3)\ldots(s+2a-2m+1)}\right],\end{aligned}\right.$$

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} B_{r,s,2a}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(2+\frac{s+r}{2}\right)}\frac{(s+2a)(s+2a-2)\ldots(s+2)}{(s+r+2a)(s+r+2a-2)\ldots(s+r+4)}\\ \left[\sum_{m=0}^{m=a-1}\binom{2a}{2m+1}i^{2m}\frac{(r+2m)(r+2m-2)\ldots(s+2)}{(s+2a-2)(s+2a-4)\ldots(s+2a-2m)}\right]\end{aligned}\right.$$

De même,

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} A_{r,s,2a+1}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s+r+3}{2}\right)}\frac{(s+2a)(s+2a-2)\ldots(s+2)}{(s+r+2a+1)(s+r+2a-1)\ldots(s+r+3)}\\ \left[\sum_{m=0}^{m=a}\binom{2a+1}{2m}i^{2m}\frac{(r+2m-1)(r+2m-3)\ldots(r+1)}{(s+2a)(s+2a-2)\ldots(s+2a-2m+2)}\right],\end{aligned}\right.$$

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} B_{r,s,2a+1}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+r+3}{2}\right)}\frac{(s+2a-1)(s+2a-3)\ldots(s+1)}{(s+r+2a+1)(s+r+2a-1)\ldots(s+r+3)}\\ \left[\sum_{m=0}^{m=a}\binom{2a+1}{2m+1}i^{2m}\frac{(r+2m)(r+2m-2)\ldots(r+2)}{(s+2a-1)(s+2a-3)\ldots(s+2a-2m+1)}\right].\end{aligned}\right.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (28) et (29), on a

$$(34) \quad . \quad . \quad B\left(\frac{2a-s-r}{2}, r+1, s+1\right) = 2^{s+r+1} \frac{\sin s\frac{\pi}{2} B_{r,s,2a} - \cos s\frac{\pi}{2} A_{r,s,2a}}{\sin(s+r)\frac{\pi}{2}},$$

$$(35) \quad B\left(\frac{2a+1-s-r}{2}, r+1, s+1\right) = 2^{s+r+1} \frac{\sin s\frac{\pi}{2} A_{r,s,2a+1} + \cos s\frac{\pi}{2} B_{r,s,2a+1}}{\cos(s+r)\frac{\pi}{2}}.$$

Si $s+r=0$, l'équation (35) devient

$$(36)^* \left\{ \begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^r \frac{x^a}{\sqrt{x}}\,dx = &-2\sin r\frac{\pi}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \frac{(2a-r)(2a-r-2)\ldots(2-r)}{(2a+1)(2a-1)\ldots 5.3} \\ &\left[\sum_{m=0}^{m=a} \binom{2a+1}{2m+1} i^{2m} \frac{(r+1)(r+3)\ldots(r+2m-1)}{(2a-r)(2a-r-2)\ldots(2a-r-2m+2)}\right] \\ &+ 2\cos r\frac{\pi}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \frac{(2a-r-1)(2a-r-3)\ldots(1-r)}{(2a+1)(2a-1)\ldots 5.3} \\ &\left[\sum_{m=0}^{m=a} \binom{2a+1}{2m+1} i^{2m} \frac{(r+2)(r+4)\ldots(r+2m)}{(2a-r-1)(2a-r-3)\ldots(2a-r-2m+1)}\right] \end{aligned} \right.$$

En particulier, $a = 0$:

$$(37) \quad \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^r \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\cos r\frac{\pi}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} - 2\sin r\frac{\pi}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}.$$

* Si, dans l'équation (36), on fait $r = 0$, on a l'identité suivante :

$$\frac{1}{2a+1} = 1 - \frac{2a}{1.3} + \frac{2a(2a-2)}{1.3.5} - \frac{2a(2a-2)(2a-4)}{1.3.5.7} + \frac{2a(2a-2)(2a-4)(2a-6)}{1.3.5.7.9} \ldots,$$

a étant entier.

Un mémoire de M. Catalan intitulé : *Sur quelques sommations et transformations de séries* contient la formule :

$$\frac{1}{p+k} = \frac{1}{p} - \frac{k}{p(p+1)} + \frac{k(k-1)}{p(p+1)(p+2)} - \ldots \pm \frac{k(k-1)\ldots 3.2.1}{p(p+1)\ldots(p+k)}.$$

Si, dans cette dernière équation, on fait successivement $r = \frac{1}{2}$, $r = -\frac{1}{2}$, on a

$$(38) \ldots\ldots \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{8\sqrt{2\pi}} - \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{2\sqrt{2\pi}},$$

$$(39) \ldots\ldots \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{2\sqrt{2\pi}} + \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{8\sqrt{2\pi}}\ {}^{*};$$

d'où, par addition,

$$(40) \ldots\ldots \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{4\sqrt{2\pi}}.$$

Si, dans cette équation (37), on pose encore $r = -\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$, on trouve les intégrales *ultra-elliptiques* suivantes :

$$(41) \quad \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^4)\sqrt{1-x^8}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)}{8\sqrt{\pi}} + 3\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{3}{8}\right)}{64\sqrt{\pi}};$$

$$(42) \quad \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x^4)\sqrt{1-x^8}} = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)}{8\sqrt{\pi}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{8}\right)\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)}{64\sqrt{\pi}};$$

$$(43) \quad \int_0^1 \frac{x^4 dx}{(1+x^4)\sqrt{1-x^8}} = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{3}{8}\right)}{64\sqrt{\pi}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)}{8\sqrt{\pi}};$$

$$(44) \quad \int_0^1 \frac{x^6 dx}{(1+x^4)\sqrt{1-x^8}} = 3\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{3}{8}\right)}{64\sqrt{\pi}} - \sqrt{2+\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)}{8\sqrt{\pi}}.$$

* On vérifie l'équation (39) en posant $x = \operatorname{tg}\varphi$.

Ajoutons les équations (41) et (43), (42) et (44),

$$(45) \ldots\ldots \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^8}} = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{3}{8}\right)}{16\sqrt{\pi}},$$

$$(46) \ldots\ldots \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^8}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{3}{8}\right)}{16\sqrt{\pi}}$$

Généralement, l'équation (36) permettra de déterminer les intégrales de la forme

$$\int_0^1 \frac{(x^4-1)^a dx}{(1+x^4)^{a+1}\sqrt{1-x^8}},\ \int_0^1 \frac{(x^4-1)^a x^2dx}{(1+x^4)^{a+1}\sqrt{1-x^8}},\ \int_0^1 \frac{(x^4-1)^a x^4dx}{(1+x^4)^{a+1}\sqrt{1-x^8}},\ \int_0^1 \frac{(x^4-1)^a x^6dx}{(1+x^4)^{a+1}\sqrt{1-x^8}}, \text{ etc.}$$

Ainsi

$$(47)\left\{\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(x^4-1)^a x^4dx}{(1+x^4)^{a+1}\sqrt{1-x^8}} = &+\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{3}{8}\right)}{4^{a+3}\sqrt{\pi}}\,\frac{(8a-5)(8a-13)\ldots 11.3}{(2a+1)(2a-1)\ldots 5.3}\\ &\left[\sum_{m=0}^{m=a}\binom{2a+1}{2m+1} i^{2m}\frac{(8m+1)(8m-7)\ldots 17.9}{(8a-5)(8a-13)\ldots(8a-8m+3)}\right]\\ &-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)}{2.4^{a+1}\sqrt{\pi}}\,\frac{(8a-1)(8a-9)\ldots 15.7}{(2a+1)(2a-1)\ldots 5.3}\\ &\left[\sum_{m=0}^{m=a}\binom{2a+1}{2m+1} i^{2m}\frac{(8m-3)(8m-11)\ldots 13.5}{(8a-1)(8a-9)\ldots(8a-8m+7)}\right].\end{aligned}\right.$$

15. Si, dans l'équation (34), on fait $a=0$, il viendra

$$(48) \ldots \int_0^1 x^{-\frac{s+r}{2}-1}(1-x)^r(1+x)^s dx = -2^{s+r}\,\frac{\cos s\frac{\pi}{2}\,\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\sin(s+r)\frac{\pi}{2}\,\Gamma\left(1+\frac{s+r}{2}\right)},$$

s et r satisfaisant aux conditions

$$s+r<0,\quad s>-1,\quad r>-1.$$

Deux cas peuvent se présenter: s et r sont de signe contraire ou tous deux négatifs. Dans le premier cas,

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^1 \frac{x^{\frac{s-r}{2}-1}(1-x)^r}{(1+x)^s}\,dx = \frac{1}{2^{s-r}} \frac{\cos s\frac{\pi}{2}\,\Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\sin(s-r)\frac{\pi}{2}\,\Gamma\left(1-\frac{s-r}{2}\right)}, \\ &s > r, \quad 1 > s > 0, \quad 1 > r > 0; \end{aligned} \right.$$

et dans le second,

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^1 \frac{x^{\frac{s+r}{2}-1}}{(1-x)^r(1+x)^s}\,dx = \frac{1}{2^{s+r}} \frac{\cos s\frac{\pi}{2}\,\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\sin(s+r)\frac{\pi}{2}\,\Gamma\left(1-\frac{s+r}{2}\right)}. \\ &1 > s > 0, \quad 1 > r > 0. \end{aligned} \right.$$

16. Dans les formules (39) et (40), supposons s nul; elles deviennent

$$(51) \left\{ \begin{aligned} &\Gamma\left(\frac{2a-r}{2}\right)\Gamma(r+1) = -2^r \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}{\sin r\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{m=0}^{m=a} \binom{2a}{2m} i^{2m} \frac{(r+1)(r+3)\ldots(r+2m-1)}{(2a-1)(2a-3)\ldots(2a-2m+1)}\right], \\ &\Gamma\left(\frac{2a+1-r}{2}\right)\Gamma(r+1) = 2^r \frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}{\cos r\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{m=0}^{m=a} \binom{2a+1}{2m+1} i^{2m} \frac{(r+2)(r+4)\ldots(r+2m)}{(2a-1)(2a-3)\ldots(2a-2m+1)}\right]. \end{aligned} \right.$$

On trouve très facilement

$$(52) \left\{ \begin{aligned} &\Gamma\left(\frac{2a-r}{2}\right)\Gamma(r+1) = (-1)^{a+1} 2^{r-a} \frac{r(r-2)(r-4)\ldots(r-2a+2)}{\sin r\frac{\pi}{2}} \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right), \\ &\Gamma\left(\frac{2a+1-r}{2}\right)\Gamma(r+1) = (-1)^a 2^{r-a} \frac{(r-1)(r-3)\ldots(r-2a+1)}{\cos r\frac{\pi}{2}} \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right). \end{aligned} \right.$$

Par le changement de r en $2x$, de r en $2x+1$, ces formules se trans-

forment en

$$(53)\quad \begin{cases} \Gamma(a-x)\Gamma(2x+1)=(-1)^{a+1}\,2^{2x}\dfrac{x(x-1)(x-2)\dots(x-a+1)}{\sin\pi x}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(x+\dfrac{1}{2}\right), \\ \Gamma(a-x)\Gamma(2x+2)=(-1)^{a+1}\,2^{2x+1}\dfrac{x(x-1)(x-2)\dots(x-a+1)}{\sin\pi x}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(x+\dfrac{3}{2}\right). \end{cases}$$

En vertu de la formule de Legendre,

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(2p)}{2^{2p-1}},$$

on peut écrire simplement

$$\Gamma(a-x)\Gamma(1+x)=(-1)^{a+1}\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-a+1)}{\sin\pi x}\pi,$$

ou encore

$$(54)\quad \dots\dots\quad \Gamma(a-x)\Gamma(1+x)=\frac{x(1-x)(2-x)\dots(a-1-x)}{\sin\pi x}\pi.$$

Cette formule ne diffère pas de celle d'Euler :

$$\Gamma(1-x)\Gamma(1+x)=\frac{\pi x}{\sin\pi x}.$$

17. Si $s+r$ est un nombre pair, le dénominateur de l'équation (34) devient nul; il doit donc en être de même du numérateur, et cette fonction prend la forme $\frac{0}{0}$. Pour trouver la valeur de l'intégrale $B(m, r+1, s+1)$, m étant entier, on posera

$$(55)\quad \dots\dots\dots\dots\quad s+r=2b+\alpha \quad (b \text{ entier})$$

α étant une variable, constamment positive, qui a pour limite zéro. Dans l'équation (34), on substituera à s sa valeur tirée de (55); on prendra, par rapport à α, les dérivées du numérateur et du dénominateur; puis, faisant $\alpha=0$, on aura la valeur de l'intégrale $B(m, r+1, s+1)$.



18. Applications. — I. Soient $s + r = \alpha$ et $a = 1$. On a

$$B\left(1-\frac{\alpha}{2}, r+1, s+1\right) = 2^{s+r}\frac{\sin s\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)}{\sin(s+r)\frac{\pi}{2}\Gamma\left(2+\frac{s+r}{2}\right)}2-2^{s+r}\frac{\cos s\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{s-1}{2}\right)(s-r)}{\sin(s+r)\frac{\pi}{2}\Gamma\left(2+\frac{s+r}{2}\right)(s+1)},$$

ou

$$B\left(1-\frac{\alpha}{2}, r+1, s+1\right) = 2^{\alpha}\frac{2\sin(\alpha-r)\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha-r}{2}\right)-\cos(\alpha-r)\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\alpha-r}{2}\right)\frac{\alpha-2r}{2}}{\sin\alpha\frac{\pi}{2}\Gamma\left(2+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

En prenant, par rapport à α, la dérivée des deux termes de cette fonction et faisant ensuite $\alpha = 0$, il viendra

$$(56)\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^1\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^r dx &= 2\cos r\frac{\pi}{2}\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)+r\sin r\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right)\\ &+\frac{1}{\pi}\left[2\sin r\frac{\pi}{2}\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)\Gamma'\left(1-\frac{r}{2}\right)+r\cos\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right)\Gamma'\left(\frac{1-r}{2}\right)\right]\\ &-\frac{1}{\pi}\cos r\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right),\\ &\qquad 1 > r > -1. \end{aligned}\right.$$

Il est permis de supposer simplement $1 > r \overline{\gt} 0$; si r est négatif, pour obtenir la valeur de l'intégrale $\int_0^1\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^r dx$, il suffit de changer r en $-r$ dans l'équation (56).

Alors, en vertu des formules :

$$\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin r\frac{\pi}{2}},$$

$$\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos r\frac{\pi}{2}},$$

il viendra

$$(57)\quad .\ .\ \int_0^1\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^r dx = \frac{2\pi r}{\sin r\pi}+r\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{1-r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right)}-\frac{\Gamma'\left(1-\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)}\right]-1.$$

Si l'on fait $\frac{1-x}{1+x} = \beta$,

$$2\int_0^1 \frac{\beta^r}{(1+\beta)^2}\,d\beta = \frac{2\pi r}{\sin r\pi} + r\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{1-r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right)} - \frac{\Gamma'\left(1-\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)}\right] - 1.$$

En vertu de l'identité :

$$\frac{d}{d\beta}\left[\frac{\beta^{r+1}}{1+\beta}\right] = r\,\frac{\beta^r}{1+\beta} + \frac{\beta^r}{(1+\beta^2)^2},$$

on a

$$2\int_0^1 \frac{\beta^r}{(1+\beta)^2}\,d\beta = 1 - 2r\int_0^1 \frac{\beta^r}{1+\beta}\,d\beta.$$

En conséquence,

$$(58)\ \ldots \quad \left\{ \int_0^1 \frac{\beta^r}{1+\beta}\,d\beta = \frac{1}{r} - \frac{\pi}{\sin \pi r} - \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{1-r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right)} - \frac{\Gamma'\left(1-\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)}\right], \quad 1 > r > -1; \right.$$

formule qu'on identifie, sans aucune difficulté, avec celle de Legendre (voir *Exercices de calcul intégral*, t. II, p. 157) :

$$(59)\ \ldots\ldots \quad \int_0^1 \frac{\beta^r}{1+\beta}\,d\beta = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{r}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} - \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}.$$

Si r est un nombre supérieur à 1, observons que

$$(60)\int_0^1 \frac{\beta^r}{1+\beta}\,d\beta = \frac{1}{r} - \frac{1}{r-1} + \frac{1}{r-2} - \frac{1}{r-3} + \cdots - \frac{(-1)^k}{r-k+1} + (-1)^k\int_0^1 \frac{\beta^{r-k}}{1+\beta}\,d\beta,$$

k étant un nombre entier satisfaisant aux inégalités

$$1 > r - k > -1.$$

En vertu de (58),

$$
(61)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\beta^r}{1+\beta}\,d\beta = \frac{1}{r} - \frac{1}{r-1} + \frac{1}{r-2} - \cdots - \frac{(-1)^k}{r-k+1} + \frac{(-1)^k}{r-k} - \frac{\pi}{\sin \pi r} \\
&- \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{k+1-r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1-r}{2}\right)} - \frac{\Gamma'\left(1-\frac{r-k}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{r-k}{2}\right)}\right].
\end{aligned}
\right.
$$

II. Dans la formule (35), supposons $a = 1$ et $s + r = 1 + \alpha$.

$$
\mathrm{B}\left(\frac{3-s-r}{2}, r+1, s+1\right) = 2^{s+r}\,\frac{\sin s\frac{\pi}{2}\,\Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right)\Gamma\left(2+\frac{s}{2}\right)}{\cos(s+r)\frac{\pi}{2}\,\Gamma\left(\frac{5}{2}+\frac{s+r}{2}\right)}\left[1-3\,\frac{r+1}{s+2}\right]
$$

$$
+ 2^{s+r}\,\frac{\cos s\frac{\pi}{2}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(1+\frac{s+1}{2}\right)}{\cos(s+r)\frac{\pi}{2}\,\Gamma\left(\frac{5}{2}+\frac{s+r}{2}\right)}\left[3-\frac{r+2}{s+1}\right]
$$

ou

$$
\mathrm{B}\left(1-\frac{\alpha}{2}, r+1, s+1)\right)
$$

$$
= 2^{1+\alpha}\,\frac{\sin(1+\alpha-r)\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1+\alpha-r}{2}\right)\left(\frac{\alpha-4r}{2}\right) + \cos(1+\alpha-r)\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha-r}{2}\right)\left(\frac{4-4r+3\alpha}{2}\right)}{\cos(1+\alpha)\frac{\pi}{2}\,\Gamma\left(3+\frac{\alpha}{2}\right)}.
$$

Prenons la dérivée, par rapport à α, des deux termes de cette fraction et faisons ensuite $\alpha = 0$;

$$
(62)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_0^1 (1-x)^r(1+x)^{1-r}dx = \Big[2r\sin r\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1-r}{2}\right) + 2(1-r)\cos r\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right) \\
&\qquad + 2\cos r\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma'\left(1+\frac{1-r}{2}\right) - (1-r)\sin r\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma'\left(1-\frac{r}{2}\right) \\
&\qquad - \cos r\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1-r}{2}\right) + 3\sin r\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)\Big] \Big/ \pi, \\
&\qquad 2 > r > -1.
\end{aligned}
\right.
$$

Toutes réductions faites, on trouve

$$63)\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^1\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^r(1+x)dx=\frac{2\pi(1-r)r}{\sin\pi r}-r(1-r)\left[\frac{\Gamma'\left(1-\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)}-\frac{\Gamma'\left(1+\frac{1-r}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1-r}{2}\right)}\right]-\frac{1+2r}{2},\\ \qquad 2>r-1.\end{array}\right.$$

III. Soient encore $s+r=1+\alpha$ et $a=2$.

En général,

$$B\left(\frac{5-s-r}{2},r+1,s+1\right)=2^{s+r}\frac{\sin s\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(3+\frac{s}{2}\right)}{\cos(s+r)\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{7+s+r}{2}\right)}\left[\frac{1}{1}-\frac{5.4}{1\,2}\,\frac{r+1}{s+4}+\frac{5.4.3.2}{1.2\;3.4}\,\frac{(r+1)(r+3)}{(s+4)(s+2)}\right]$$

$$+2^{s+r}\frac{\cos s\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(2+\frac{s+1}{2}\right)}{\cos(s+r)\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{7+s+r}{2}\right)}\left[\frac{5}{1}-\frac{5.4.3}{1.2.3}\,\frac{r+2}{s+3}+\frac{(r+2)(r+4)}{(s+3)(s+1)}\right];$$

ou

$$B\left(\frac{5-s-r}{2},r+1,s+1\right)=2^{s+r}\frac{\sin s\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)}{\cos(s+r)\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{7+s+r}{2}\right)}\left[(4+s)(2+s)-10(r+1)(s+2)+5(r+1)(r+3)\right]$$

$$+2^{s+r}\frac{\cos s\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\cos(s+r)\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{7+s+s}{2}\right)}\left[5(s+3)(s+1)-10(r+2)(s+1)+(r+2)(r+4)\right].$$

En conséquence,

$$\int_0^1 x(1-x)^r(1+x)^{1-r}dx=-\left[\pi\sin r\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1-r}{2}\right)+\cos r\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1-r}{2}\right)\right]$$
$$\frac{(5-r)(3-r)+10(r+1)(r-3)+5(r+1)(r+3)}{12\pi}$$
$$+\left[\pi\cos r\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)-\sin r\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma'\left(1-\frac{r}{2}\right)\right]$$
$$\frac{5(4-r)(2-r)+10(r+2)(r-2)+(r+2)(r+4)}{12\pi}$$
$$+\frac{\cos r\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1-r}{2}\right)(1+6r)-\sin r\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)(1-2r)5}{3\pi};$$

c'est-à-dire

$$(64)\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^r(1+x)^{1-r}dx=\frac{r(r-1)(2r-1)}{3}\left[\frac{2\pi}{\sin r\pi}+\frac{\Gamma'\left(1+\frac{1-r}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1-r}{2}\right)}-\frac{\Gamma'\left(1-\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)}\right]+\frac{1+4r^2}{6},\\ \qquad\qquad 2>r>-1.\end{array}\right.$$

19. Connaissant les valeurs des intégrales de la forme $\int_0^1 x^a(1+x)^a\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^r dx$, on déterminera sans difficulté celles de

$$\int_0^1 x^m\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^r dx,$$

r satisfaisant aux inégalités

$$1>r>-1.$$

En effet, en vertu des équations (57) et (63),

$$(65)\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^1 x\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^r dx=-\frac{2\pi r^2}{\sin\pi r}\\ \displaystyle+\frac{1}{2}-r+r^2\left[\frac{\Gamma'\left(1-\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)}-\frac{\Gamma'\left(1+\frac{1-r}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1-r}{2}\right)}\right]+r\left[\frac{\Gamma'\left(1+\frac{1-r}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1-r}{2}\right)}-\frac{\Gamma'\left(\frac{1-r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right)}\right],\\ \qquad\qquad 1>r>-1.\end{array}\right.$$

Maintenant, les valeurs des intégrales $\int_0^1\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^r dx$, $\int_0^1 x\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^r dx$ étant connues, on tirera de l'équation (64) celles de

$$\int_0^1 x^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^r dx,$$

etc., etc.

20. Possédant actuellement les valeurs des intégrales $\int_0^1 x^m\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^r dx$, $\int_0^1 x^m\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^r dx$, pour toutes les valeurs de r comprises entre -1 et $+1$

exclusivement, on déterminera, par addition ou par soustraction, les transcendantes

$$\int_0^1 x^m \frac{(1+x)^{2r}+(1-x)^{2r}}{(1-x^2)^r}dx, \quad \int_0^1 x^m \frac{(1+x)^{2r}-(1-x)^{2r}}{(1-x^2)^r}dx,$$

l'exposant r variant toujours entre les mêmes limites.

Ainsi, en vertu de (57),

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^{2r}+(1+x)^{2r}}{(1-x^2)^r}dx = \frac{4\pi r}{\sin r\pi} + 2r\frac{d}{dr}\lg\left[\frac{\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right)}\right]-2,$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^{2r}-(1+x)^{2r}}{(1-x^2)^r}dx = 2r\frac{d}{dr}\lg\frac{\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right)};$$

puis

(66) . . . . $$\int_0^1 \frac{(1+x)^{2r}+(1-x)^{2r}}{(1-x^2)^r}dx = \frac{2\pi r}{\sin \pi r},$$

(67) $$\int_0^1 \frac{(1-x)^{2r}-(1+x)^{2r}}{(1-x^2)^r}dx = 2 - \frac{2\pi r}{\sin \pi r} + 2r\left[\frac{\Gamma'\left(1-\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{1-r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right)}\right].$$

Par la transformation $\frac{1-x}{1+x} = \beta$, l'équation (66) devient

$$\int_0^1 \frac{\beta^r+\beta^{-r}}{(1+\beta)^2}d\beta = \frac{\pi r}{\sin \pi r},$$

ou

$$\int_0^\infty \frac{\beta^r d\beta}{(1+\beta)^2} = \frac{2\pi}{\sin \pi r};$$

c'est-à-dire

$$\int_0^\infty \frac{\beta^{r-1}}{1+\beta}d\beta = \frac{\pi}{\sin \pi r},$$

formule qui joue un rôle important dans la théorie des intégrales définies.

21. Remarque. — Nous connaissons la valeur de $B(p, r+1, s+1)$ développée en série convergente; généralement,

$$B\left(\frac{q-s-r}{2}, r+1, s+1\right)$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{q-s-r}{2}\right)\Gamma(r+1)}{\Gamma\left(\frac{q-s+r}{2}+1\right)}\left[\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{s}{k}\frac{(q-s-r+2k-2)(q-s-r+2k-4)\ldots(q-s-r)}{(q-s+r+2k)(q-s+r+2k-2)\ldots(q-s+r+2)}\right];$$

ou, en posant

$$q-s-r=p,$$

$$B\left(\frac{p}{2}, r+1, s+1\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma(r+1)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+r+1\right)}\left[\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{s}{k}\frac{(p+2k-2)(p+2k-4)\ldots(p+2)p}{(p+2r+2k)(p+2r+2k-2)\ldots(p+2r+2)}\right].$$

Conséquemment, si p satisfait à l'égalité

$$p+s+r=a, \qquad (a \text{ entier}),$$

on connaîtra la somme de la série convergente

$$T=\left[\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{s}{k}\frac{(p+2k-2)(p+2k-4)\ldots(p+2)p}{(p+2r+2k)(p+2r+2k-2)\ldots(p+2r+2)}\right],$$

où l'on suppose

$$p>0, \quad s>-1, \quad r>-1.$$

En particulier, en vertu de l'équation (48), il viendra

$$(69)\ \ldots\ \left\{\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{k=\infty}\binom{s}{k}\frac{(-s-r+2k-2)(-s-r+2k-4)\ldots(-s-r)}{(-s+r+2k)(-s+r+2k-2)\ldots(-s+r+2)}\\&=-2^{s+r}\frac{\cos s\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r-s}{2}+1\right)}{\sin(s+r)\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{s+r}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{-s-r}{2}\right)\Gamma(r+1)},\end{aligned}\right.$$

s et r satisfaisant aux inégalités

$$s+r<0, \quad s>-1, \quad r>-1.$$

22. Toutes les formules établies précédemment supposent que l'exposant s, dans l'intégrale $B(p,\ r + 1, s + 1)$, est supérieur à -1. Nous examinerons maintenant dans quels cas il est possible d'exprimer, sous forme finie, la transcendante

$$B(p,\ r + 1,\ 1 - s) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^r}{(1+x)^s},$$

s étant un nombre quelconque.

Schlömilch, Abel et Boncompagni ont trouvé la formule

$$(70) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^r}{(1+x)^{p+r+1}}\,dx = \frac{1}{2^p}\,B(p, r+1).$$

Nous allons prouver que, si p, r et s satisfont aux conditions

$$(71) \quad \ldots\ldots \quad p > 0, \quad r > -1, \quad 2p + r - s = a, \quad (a = \text{entier})$$

la transcendante $\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^r}{(1+x)^s}dx$ ou $\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^r}{(1+x)^{2p+r-a}}dx$ est exprimable par les intégrales eulériennes.

En effet, posons $x = \frac{y}{1+y}$, d'où $dx = \frac{dy}{(1+y)^2}$; par suite,

$$(72) \quad \ldots\ldots \quad \int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^r}{(1+x)^s}\,dx = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+r-s+1}(1+2y)^s}\,dy\ ^*.$$

* Si, dans l'équation (72), on suppose $p + r - s + 1 = 0$, la formule d'Abel en résulte immédiatement. En effet,

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^r}{(1+x)^{p+r+1}}\,dx = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+2y)^{p+r+1}}\,dy;$$

or,

$$\frac{1}{(1+2y)^{p+r+1}} = \frac{1}{\Gamma(p+r+1)}\int_0^\infty e^{-(1+2y)x}x^{p+r}dx;$$

donc

$$\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+2y)^{p+r+1}}\,dy = \frac{1}{\Gamma(p+r+1)}\int_0^\infty y^{p-1}dy\int_0^\infty e^{-(1+2y)x}x^{p+r}dx.$$

Par suite,

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}(1-x)^r}{(1+x)^{p+r+1}}\,dx = \frac{1}{2^p}\frac{\Gamma(p)\Gamma(r+1)}{\Gamma(p+r+1)},$$

en changeant l'ordre des intégrations.

Mais

$$\frac{1}{(1+2y)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-(1+2y)x} x^{s-1}\, dx,$$

$$\frac{1}{(1+y)^{p+r-s+1}} = \frac{1}{\Gamma(p+r-s+1)} \int_0^\infty e^{-(1+y)z} z^{p+r-s}\, dz;$$

d'où

$$(\alpha) \qquad \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+2y)^s (1+y)^{p+r-s+1}}\, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(p+r-s+1)} \int_0^\infty y^{p-1}\, dy \int_0^\infty e^{-(1+y)z} z^{p+r-s}\, dz \int_0^\infty e^{-(1+2y)x} x^{s-1}\, dx,$$

et, en intervertissant l'ordre des intégrations,

$$\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+r-s+1}(1+2y)^s}\, dy = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(s)\Gamma(p+r-s+1)} \int_0^\infty e^{-z} z^{p+r-s}\, dz \int_0^\infty \frac{e^{-x} x^{s-1}}{(z+2x)^p}\, dx.$$

Posons $x = \alpha z$, d'où

$$\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+r-s+1}(1+2y)^s}\, dy = \frac{\Gamma(p)\Gamma(r+1)}{\Gamma(s)\Gamma(p+r-s+1)} \int_0^\infty \frac{\alpha^{s-1}}{(1+\alpha)^{r+1}(1+2\alpha)^p}\, d\alpha,$$

ou

$$\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+r-s+1}(1+2y)^s}\, dy = \frac{\Gamma(p)\Gamma(r+1)}{\Gamma(s)\Gamma(p+r-s+1)} \int_0^\infty \frac{\alpha^{s-1}}{(1+\alpha)^{r+1}(1+2\alpha)^p}\, dx.$$

Or,

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^{s-1}}{(1+\alpha)^{r+1}(1+2\alpha)^p}\, dx = \int_0^1 \frac{x^{s-1}(1-x)^{p+r-s}}{(1+x)^p}\, dx,$$

en faisant

$$x = \frac{\alpha}{1+\alpha}.$$

Conséquemment,

$$(73) \quad . \quad . \int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^r}{(1+x)^s}\, dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(r+1)}{\Gamma(s)\Gamma(p+r-s+1)} \int_0^1 \frac{x^{s-1}(1-x)^{p+r-s}}{(1+x)^p}\, dx.$$

Si p est un nombre compris entre 0 et 1, on déterminera très facilement les valeurs de l'intégrale du second membre de l'équation (73), si r, s et p satisfont à la condition

(74) . . . . $2p + r - s = N.$ (N entier.)

23. Faisons successivement $N = 0, 1, 2$; on aura, en vertu de (73), les formules suivantes :

$$(75) \quad \int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^r}{(1+x)^{2p+r}}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{r}{2}\right)\Gamma(1+r)}{\Gamma(2p+r)\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)},$$

p satisfaisant à l'inégalité

$$1 > p > 0;$$

$$(76) \quad \int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^r}{(1+x)^{2p+r-1}}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(p)\Gamma(1+r)}{(1-p)\Gamma(2p+r-1)}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{2p+r-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{2p+r}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)}\right];$$

$$(77) \int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^r}{(1+x)^{2p+r-2}}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(p)\Gamma(1+r)}{(2-p)(1-p)\Gamma(2p+r-2)}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{2p+r-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} - 2\frac{\Gamma\left(\frac{2p+r-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)} + \frac{\Gamma\left(\frac{2p+r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}\right].$$

En posant $\frac{1-x}{1+x} = \beta$ et changeant ensuite β en x, on aura :

$$(78) \quad \int_0^1 x^r(1-x^2)^{p-1}\,dx = 2^{2p-2}\,\frac{\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{r}{2}\right)\Gamma(1+r)}{\Gamma(2p+r)\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)}.\ *$$

* On doit avoir identiquement

$$\frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma(p)}{\Gamma\left(p+\frac{r+1}{2}\right)} = 2^{2p-1}\,\frac{\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{r}{2}\right)\Gamma(1+r)}{\Gamma(2p+r)\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)},$$

ou

$$\frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)}{\Gamma(1+r)} = 2^{2p-1}\,\frac{\Gamma\left(p+\frac{r}{2}\right)\Gamma\left(p+\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma(2p+r)};$$

ce qui est exact, en vertu de la formule de Legendre

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)}{2^{2x-1}}.$$

$$(79)\quad \int_0^1 \frac{x^r}{(1+x)(1-x^2)^{1-p}}\,dx = 2^{2p-3}\frac{\Gamma(p)\Gamma(1+r)}{(1-p)\Gamma(2p+r-1)}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{2p+r-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+r}{2}\right)}-\frac{\Gamma\left(\frac{2p+r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}\right],$$

$$(80)\quad \int_0^1 \frac{x^r}{(1+x)^2(1-x^2)^{1-p}}\,dx = 2^{2p-4}\frac{\Gamma(p)\Gamma(1+r)}{(2-p)(1-p)\Gamma(2p+r-2)}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{2p+r-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}-2\frac{\Gamma\left(\frac{2p+r-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}+\frac{\Gamma\left(\frac{2p+r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}\right].$$

Les deux membres des équations (78), (79) et (80) sont des fonctions continues de p, constamment égales entre elles pour les valeurs de p comprises entre 0 et 1 ; donc, pour $p=1$,

$$(81)\ \ldots\ldots\quad \int_0^1 \frac{x^r}{1+x}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{r}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}-\frac{\Gamma'\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}\right],$$

et

$$\int_0^1 \frac{x^r}{(1+x)^2}\,dx = \frac{r}{4}\left[2\frac{\Gamma'\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}-\frac{\Gamma'\left(\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}-\frac{\Gamma'\left(\frac{r}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}\right];$$

ou

$$(82)\ \ldots\ldots\quad \int^1 \frac{x^r}{(1+x)^2}\,dx = \frac{r}{2}\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}-\frac{\Gamma'\left(\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}\right]-\frac{1}{2}.$$

Semblablement, on trouve

$$(83)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^r}{(1+x)^3(1-x^2)^{1-p}}\,dx = 2^{2p-5}\frac{\Gamma(p)\Gamma(1+r)}{(3-p)(2-p)(1-p)\Gamma(2p+r-3)} \\ \displaystyle\left[\frac{\Gamma\left(\frac{2p+r-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r-1}{2}\right)}-3\frac{\Gamma\left(\frac{2p+r-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}+3\frac{\Gamma\left(\frac{2p+r-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}+\frac{\Gamma\left(\frac{2p+r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}\right]. \end{cases}$$

Si $p=1$, le second membre prend la forme $\frac{0}{0}$ et sa valeur est égale au rapport des dérivées; par suite

$$\int^1 \frac{x^r}{(1+x)^3}\,dx = \frac{r(r-1)}{16}\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{r}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}-3\frac{\Gamma'\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}+3\frac{\Gamma'\left(\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}-\frac{\Gamma'\left(\frac{r-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r-1}{2}\right)}\right],$$

ou

$$(84) \quad \ldots \quad \int_0^1 \frac{x^r}{(1+x)^3}\,dx = \frac{r(r-1)}{4}\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{r-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r-1}{2}\right)}\right] - \frac{1+2r}{8}.$$

On transforme aisément les formules (79) et (80) en les suivantes :

$$(85) \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^r}{(1+x)(1-x^2)^{1-p}}\,dx = \frac{1}{4(1-p)}\left[r\frac{\Gamma(p)\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(p+\frac{r}{2}\right)} - (2p+r-1)\frac{\Gamma(p)\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(p+\frac{r+1}{2}\right)}\right], \\ 1 > p > 0, \quad 2p+r-1 > 0. \end{array}\right.$$

$$(86) \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^r}{(1+x)^2(1-x^2)^{1-p}}\,dx = \frac{1}{4(2-p)(1-p)} \\ \displaystyle\left[(2p+r-1)(p+r-1)\frac{\Gamma(p)\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(p+\frac{r+1}{2}\right)} - r(2p+r-2)\frac{\Gamma(p)\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(p+\frac{r}{2}\right)}\right], \\ 1 > p > 0, \quad 2p+r-2 > 0. \end{array}\right.$$

24. Si p est supérieur à 1, on aura

$$\int_0^1 \frac{x^r(1-x^2)^{p-1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^r(1-x^2)^{a+\alpha-1}}{1+x}\,dx,$$

a étant le plus grand nombre entier contenu dans p ; par suite,

$$(87) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^r(1-x^2)^{p-1}}{1+x}\,dx = \sum_{k=0}^{k=a}(-1)\binom{a}{k}\int_0^1 \frac{x^{r+2k}}{(1+x)(1-x^2)^{1-\alpha}}\,dx, \\ 1 > \alpha > 0. \end{array}\right.$$

La formule (85) est applicable.

Ainsi, si r, s et p satisfont aux conditions

$$p > 0, \quad r > -1, \quad 2p+r+s = a, \qquad (a = \text{entier}),$$

la transcendante

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^r(1+x)^s dx$$

s'exprime toujours au moyen des intégrales eulériennes.

Il est à peu près inutile d'ajouter que si les deux premières conditions n'étaient pas vérifiées, la valeur de l'intégrale serait infiniment grande.

25. Si r est rationnel et de la forme $\frac{m}{n}$, m et n étant entiers, les formules (79) et (80) deviendront

$$(88)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 \frac{\beta^{m-1}}{(1+\beta^n)(1-\beta^{2n})^{1-p}}\,d\beta = \frac{1}{4n^2(1-p)}\left[(2n-2pn-m)\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2n}\right)\Gamma(p)}{\Gamma\left(p+\frac{m}{2n}\right)} + (2np+m-n)\frac{\Gamma(p)\Gamma\left(\frac{m+n}{2n}\right)}{\Gamma\left(p+\frac{m+n}{2n}\right)}\right], \\ \qquad\qquad 2pn+m-n>0 \end{array} \right.$$

$$(89)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 \frac{\beta^{m-1}}{(1+\beta^n)^2(1-\beta^{2n})^{1-p}}\,d\beta = \frac{1}{4n^3(2-p)(1-p)}\left[\begin{array}{l} (2n-2pn-m)(2n-pn-m)\dfrac{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{m}{2n}\right)}{\Gamma\left(p+\frac{m}{2n}\right)} \\ (2pn+m-n)(3n-2pn-m)\dfrac{\Gamma(p)\Gamma\left(\frac{m+n}{2n}\right)}{\Gamma\left(p+\frac{m+n}{2n}\right)} \end{array}\right], \\ \qquad\qquad 2pn+m-2n>0. \end{array} \right.$$

Les deux membres des équations (88) et (89) sont des fonctions continues de p constamment égales entre elles; donc, à la limite, ces fonctions, finies ou infinies, seront encore égales. Alors,

$$(90)\ \ldots \int_0^1 \frac{\beta^{m-1}}{(1+\beta^n)(1-\beta^{2n})^{\frac{m+n}{2n}}}\,d\beta = \frac{1}{2(m+n)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{n-m}{2n}\right)}{\sqrt{\pi}},$$

$$(91)\ \ldots \int_0^1 \frac{\beta^{m-1}}{(1+\beta^n)^2(1-\beta^{2n})^{\frac{m}{2n}}}\,d\beta = \frac{2n}{m(2n+m)}\,\frac{\Gamma\left(1-\frac{m}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{m+n}{2n}\right)}{\sqrt{\pi}}$$

Si $n=m$, l'équation (91) deviendra

$$(92)\ \ldots\ldots\ldots \int_0^1 \frac{\beta^{n-1}}{(1+\beta^n)^2\sqrt{1-\beta^{2n}}}\,d\beta = \frac{2}{3n},$$

résultat qu'on vérifie très facilement.

Si, dans les équations (88) et (89), on fait $p = \frac{1}{2}$,

$$(93) \quad . \quad . \quad \int_0^1 \frac{\beta^{m-1}}{(1+\beta^n)\sqrt{1-\beta^{2n}}}\,d\beta = 2^{\frac{m}{n}-2}\,\frac{(n-m)\Gamma^2\left(\frac{m}{2n}\right)+2n\Gamma^2\left(\frac{m+n}{2n}\right)}{n^2\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)},$$

$$(94) \quad \int_0^1 \frac{\beta^{m-1}}{(1+\beta^n)^2\sqrt{1-\beta^{2n}}}\,d\beta = 2^{\frac{m}{n}-1}\,\frac{(3n-2m)(n-m)\Gamma^2\left(\frac{m}{2n}\right)+4n(2n-m)\Gamma^2\left(\frac{m+n}{2n}\right)}{6n^3\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)}.$$

26. Remarque. — Dans certains cas, les transcendantes des équations (88) et (89) peuvent être ramenées directement aux intégrales eulériennes.

Le premier membre de l'équation (88) devient

$$(95) \quad \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x^n)(1-x^{2n})^{1-p}}\,dx = \frac{2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin\varphi)^{2\frac{m}{n}-1}(\cos\varphi)^{4(1-p)-2\frac{m}{n}+1}}{(\cos 2\varphi)^{1-p}}\,d\varphi,$$

en posant

$$x = \operatorname{tg}^2\varphi$$

Si m, n et p satisfont aux conditions

$$(96) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2\frac{m}{n}-1 \overline{>} 0, \quad 5-4p-2\frac{m}{n} \overline{>} 0, \quad 2\frac{m}{n}+2p-3 = \text{N},$$

N étant un nombre entier positif, nul ou négatif, les transcendantes (88) sont réductibles directement aux intégrales eulériennes.

Il en est de même si m, n et p vérifient les conditions

$$2\frac{m}{n}-1 < 0, \quad 5-4p-2\frac{m}{n} < 0, \quad 2\frac{m}{n}-1 = 5-4p-2\frac{m}{n}.$$

Si $p = \frac{1}{2}$, les conditions (96) deviennent

$$2\frac{m}{n}-1 \overline{>} 0, \quad 3-2\frac{m}{n} \overline{>} 0, \quad 2\frac{m}{n} = \text{N}+2.$$

Ainsi, la transformation

$$x = \operatorname{tg}^2 \varphi$$

ramènera aux intégrales eulériennes les transcendantes

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}, \quad \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}.$$

Si n est égal à 3 ou à 4, pour que cette transformation réussisse, m doit être un multiple de 3 ou de 2; mais alors les intégrales $\int_0^1 \frac{x^{3m-1}}{(1+x^3)\sqrt{1-x^6}}\,dx$, $\int_0^1 \frac{x^{2m-1}}{(1+x^4)\sqrt{1-x^8}}\,dx$ ne diffèrent que, pour la forme, des transcendantes

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}\,dx.$$

ADDITION.

Monsieur Mansion, le savant professeur de l'Université de Gand, m'a fait remarquer la nécessité de démontrer la légitimité de l'inversion de l'ordre des intégrations dans l'équation (α).

Soient

$$s > 0, \quad p > 0, \quad r > -1, \quad r - s + 1 > 0.$$

La série hypergéométrique,

$$(1) \quad \mathrm{T} = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(r+1)}{\Gamma(p+r+1)}\left[1 - \frac{s}{1}\,\frac{p}{p+r+1} + \frac{s(s+1)}{1.2}\,\frac{p(p+1)}{(p+r+1)(p+r+2)} - \cdots\right].$$

sera absolument convergente. [*Gaus's Wercke*, tome III, page 139.]

Par suite,

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \quad \mathrm{T} = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^r dx \left[1 - \frac{s}{1}x + \frac{s(s+1)}{1.2}x^2 - \cdots\right].$$

Considérons maintenant la série :

$$(5) \qquad Q = \int_0^{1-\varepsilon} x^{p-1}(1-x)^r dx \left[1 - \frac{s}{1}x + \frac{s(s+1)}{1.2}x^2 - \cdot\right] = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x^{p-1}(1-x)^r}{(1+x)^s} dx,$$

ε désignant une quantité positive infiniment petite, qui a pour limite zéro.

Les deux membres de l'équation (5) sont des fonctions finies et continues de ε, constamment égales entre elles ; donc à la limite,

$$T = \lim Q = \lim \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x^{p-1}(1-x)^r}{(1+x)^s} dx = \int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^r}{(1+x)^s} dx.$$

D'autre part, cette même série T peut être mise sous la forme :

$$T = \frac{\Gamma(p)\Gamma(r+1)}{\Gamma(s)\Gamma(p+r-s+1)}\left[\frac{\Gamma(s)\Gamma(p+r-s+1)}{\Gamma(p+r+1)} - \frac{p}{1}\frac{\Gamma(s+1)\Gamma(p+r-s+2)}{\Gamma(p+r+2)} + \cdots\right];$$

c'est-à-dire,

$$T = \frac{\Gamma(p)\Gamma(r+1)}{\Gamma(s)\Gamma(p+r-s+1)} \int_0^1 \frac{x^{s-1}(1-x)^{p+r-s}}{(1+x)^r} dx.$$

En conséquence,

$$(4) \quad . \quad . \int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^r}{(1+x)^s} dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(r+1)}{\Gamma(s)\Gamma(p+r-s+1)} \int_0^1 \frac{x^{s-1}(1-x)^{p+r-s}}{(1+x)^p} dx.$$

Remarque. J'ai montré que, si r, s et p satisfont à l'égalité

$$2p + r - s = N, \qquad \text{(N entier)}$$

les transcendantes $B(p, r+1, 1-s)$ sont réductibles aux intégrales culériennes,

Cette condition s'accorde avec celle énoncée plus haut :

$$r - s + 1 > 0,$$

qui devient ainsi

$$N - 2p + 1 > 0.$$

p étant un nombre compris entre 0 et 1, cette inégalité est vérifiée pour toutes les valeurs de N, excepté zéro. Mais, dans ce cas, la transformation

$$\frac{1+x}{1-x} = \beta,$$

nous a permis de vérifier l'exactitude de l'équation (75).

On peut donc affirmer que la formule (4) est vraie pour toutes les valeurs de p, r et s satisfaisant aux conditions

$$p > 0, \quad s > 0, \quad r > -1, \quad 2p + r - s = N,$$

N étant un nombre entier, nul ou positif.

Liége, le 10 août 1889.



ENSEMBLE

DES

OBSERVATIONS PHYSIQUES DE LA PLANÈTE MARS

Faites à Louvain, en 1888, à l'équatorial de huit pouces de Grubb,

PAR

F. TERBY.

Ecce, labora .....

(AVEC 2 PLANCHES.)

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 2 février 1889.)



ENSEMBLE

DES

OBSERVATIONS PHYSIQUES DE LA PLANÈTE MARS

Faites à Louvain, en 1888, à l'équatorial de huit pouces de Grubb.

I. — Introduction.

J'attendais avec impatience l'opposition de Mars en 1888 pour essayer sur cette planète la puissance de mon nouvel équatorial de huit pouces, construit par Sir Howard Grubb. Malheureusement la faible hauteur de l'astre au-dessus de l'horizon et son éloignement ne permettaient guère d'espérer des résultats bien complets. Quand j'aurai rappelé que, pendant la période des observations, les circonstances atmosphériques les plus détestables n'ont cessé de régner, l'on ne s'étonnera point de trouver ici consignés des faits très minimes en comparaison de ceux que M. Schiaparelli a constatés sous le ciel de Milan, pendant des oppositions beaucoup plus favorables, à l'aide d'un instrument de dimensions à peu près identiques et d'un œil d'une incomparable acuité. Tandis que, dans de bonnes conditions, l'équatorial de Grubb a déjà supporté parfaitement une amplification de 650 fois environ pour l'observation de Saturne et de la Lune, par exemple, c'est à peine s'il tolérait le grossissement de 280 fois pendant cette opposition défavorable de Mars.

Pendant le cours lui-même des observations, des nouvelles importantes arrivaient de Nice, où M. Perrotin[1], armé d'une lunette qui n'est surpassée actuellement que par celle du Mont Hamilton, constatait les faits les plus intéressants; ces faits peuvent être rangés en trois catégories : 1° *faits relatifs à la Libye;* 2° *présence dans la tache polaire boréale d'un trait noir comme*

[1] *Comptes rendus de l'Acad. des Sc. de Paris*, 1888, 14 mai, 18 juin, 16 juill., 10 sept.

de l'encre; 3° constatation de l'existence des canaux et de leur gémination. D'autre part, M. SCHIAPARELLI voulait bien me tenir au courant des découvertes nouvelles qu'il faisait chaque jour à Milan avec son dix-huit-pouces de MERZ : j'apprenais qu'il voyait aussi les détails signalés par M. PERROTIN [1]. Et à Louvain, de mon côté, à l'aide du huit-pouces, je constatais l'existence du filet noir de la tache polaire, celle d'un grand nombre de canaux et la gémination tout au moins du Phison; j'observais aussi distinctement la Libye. En raison de l'actualité de ces faits, j'ai mentionné quelques-uns de mes résultats dans les *Comptes rendus de l'Acad. des Sc. de Paris* [2], dans *Ciel et Terre* [3] et dans la Revue l'*Astronomie,* de M. FLAMMARION [4].

Ces notes partielles et éparses ne peuvent donner qu'une idée bien incomplète des observations de Louvain; six dessins seulement publiés dans l'*Astronomie* n'ont pas même été accompagnés de l'indication des jours et des heures; de plus, ces dessins ne représentent pas la planète telle qu'elle a été vue en réalité, mais, pour ne pas multiplier leur nombre, j'y ai réuni souvent les détails fournis par plusieurs soirées d'observation; quelle que soit leur importance au point de vue de la vérification des cartes de M. SCHIAPARELLI, ils ne peuvent servir à donner une idée parfaite des résultats obtenus. Un travail d'ensemble seul, comprenant tous les détails des observations faites à Louvain, pouvait combler ces lacunes déplorables et c'est l'objet du présent mémoire.

Tous mes dessins ont été rangés dans l'ordre des longitudes aréographiques croissantes, calculées à l'aide des *Éphémérides* de M. MARTH [5] et les descriptions se suivent de même. Un tableau général réunit ensuite les observations dans l'ordre des dates avec les longitudes en regard.

Disons encore quelques mots, dans cette Introduction, sur la manière dont nous avons procédé.

1 *Ciel et Terre,* août 1888; *Himmel und Erde,* 1888, I.
2 22 mai 1888.
3 Août 1888.
4 Septembre 1888.
5 *Monthly not.*, déc. 1887. — Qu'il me soit permis d'insister ici sur la part qui revient à M. MARTH dans tous les progrès actuels de la planétographie, par la publication de ses inestimables *Éphémérides.*

Notre but principal était la vérification des admirables cartes de M. SCHIAPARELLI, cartes qui sont encore aujourd'hui même, il faut l'avouer avec regret, l'objet d'une méfiance fort peu justifiée. Nous nous sommes inspiré du principe énoncé par de grands observateurs : « Souvent, ont-ils dit, on ne voit bien que ce que l'on recherche » ; M. O. STRUVE n'aurait probablement jamais découvert la nébuleuse de Maïa à l'aide du grand équatorial de Poulkova s'il n'avait été préalablement averti de sa présence par les photographies de MM. HENRY, et s'il ne l'avait recherchée avec intention[1]. De même nous avons *recherché* les canaux de Mars, dans les régions où nous savions que M. SCHIAPARELLI les avait constatés; nous avons eu soin de calculer d'avance approximativement la longitude du méridien central pour chaque observation, et, la carte à la main, en quelque sorte, nous avons patiemment et obstinément poursuivi ces détails d'une haute difficulté. C'est à cette méthode, nous n'hésitons pas à le dire, que nous devons notre succès partiel. Comme M. PERROTIN le dit lui-même, tout cela ne saute pas aux yeux, même dans les plus grandes lunettes dont l'humanité dispose; il faut, pour y réussir, la plus grande attention, la plus grande persévérance. A plus forte raison l'observateur armé d'un simple huit-pouces, dans les circonstances défavorables que nous avons traversées, se découragera-t-il bien vite s'il n'est pas, à l'avance, soutenu par une foi inébranlable dans la vérité des résultats de Milan; cette foi seule, en effet, peut lui inspirer la persévérance et je dirai même l'obstination nécessaires. D'aussi prodigieuses difficultés font à l'incrédulité la partie belle, et il est permis de croire que les observateurs munis de moyens suffisants, et qui n'ont point réussi à voir les canaux et la gémination, auront souvent abandonné l'observation faute de confiance préalable ou de connaissance antérieure des détails à découvrir.

Dans le but de pouvoir abréger le texte descriptif, j'ai apporté aux figures des soins exceptionnels; leur fond est légèrement ombré pour faire ressortir les parties blanches et brillantes; quelques teintes y ont été fixées; en un mot chaque détail des dessins a son importance et correspond à un fait réel; les planches doivent donc être examinées avec grande attention.

[1] *Astron. Nachr.*, Bd. 114, p. 97.

Toutes les figures ont été rigoureusement copiées d'après les seuls originaux que je possède et qui ont été exécutés eux-mêmes au télescope; ces originaux ont exactement la même grandeur que les dessins de ce mémoire et sont placés ou orientés exactement de la même manière; ils n'ont été l'objet d'aucune retouche après l'observation, et les notes seules prises au télescope ont servi à donner aux figures l'aspect définitif qu'elles ont dans ce mémoire. En achevant nos deux planches, nous y avons rencontré quelques imperfections que les aréographes exercés ne manqueront point de remarquer; la forme, les positions, par exemple, de certaines taches, difficiles surtout, donnent prise à des objections que nous ne cherchons pas à nous dissimuler, surtout si l'on envisage ces taches dans plusieurs dessins successifs; ces défauts sont imputables à l'extrême, à la prodigieuse difficulté avec laquelle certains détails se laissaient voir, et je me suis bien gardé de retoucher les dessins de quelque façon que ce fût, pour atténuer ces irrégularités; je compte donc sur leur sincérité pour leur voir obtenir un indulgent et bienveillant accueil. Le lecteur n'oubliera pas, dans ces cas spéciaux, qu'en tout état de cause, ce n'est point *l'existence* des détails signalés qui peut être mise en doute.

II. — Observations.

1888.

9 juillet, de $8^h 41^m$ *à* $8^h 46^m$ [1] (t. m. de Bruxelles); L [2] = 8°; *fig. 1.*

L'observation est continuée jusqu'à $8^h 50^m$.

Grossissements : 280, 180 fois [3]; agitations atroces.

On soupçonne par moments la grande Syrte au bord occidental [4]; au bord

[1] Heure du dessin.

[2] Longitude du méridien central. Cette longitude correspond à l'heure moyenne du dessin.

[3] Approchés.

[4] Considéré *géocentriquement*. Les dessins sont placés comme Mars se présentait dans le champ de la lunette, image renversée. Pour s'orienter, il suffit de considérer toujours la tache polaire septentrionale qui figure dans le quart inférieur droit.

oriental, en bas, on soupçonne également et par moments Mare Acidalium; la bande supérieure, qui est le Sinus Sabaeus, s'allonge en pointe vers le centre et simule par moments la grande Syrte; c'est un aspect que produit souvent l'ensemble confondu de la Baie fourchue et de l'Indus.

31 mai. J'observe depuis 7^h46^m, mais l'image est un peu voilée et agitée; j'emploie les amplifications de 280, 420, 250 et 450 fois. Je vois le Sinus Sabaeus, la baie de Dawes non dédoublée, Deucalionis regio, l'embouchure de l'Indus assez difficile, Mare Acidalium et Nilokeras. Tempe est blanc et brillant au bord oriental; je vois aussi le Deuteronilus en *a*, le lacus Ismenius en *b*, une portion de l'Euphrate en *c*, le lacus Hyperboreus en *d* (v. *fig. 2*); une blancheur se montre au bord occidental.

Je dessine Mars *de* 9^h16^m *à* 9^h30^m ± ; L = 26°1 ± ; *fig. 2;* je vois Argyre blanche et brillante, en haut du disque, en *e*; Pyrrhae et Protei regio en *f*. Au moment du dessin, le Deuteronilus et le lacus Ismenius sont bien moins visibles qu'à 7^h46^m. On termine les observations à 9^h33^m.

19 avril, de 8^h14^m *à* 8^h27^m, par une éclaircie; L = 27°6; *fig. 3*.

On continue l'observation jusqu'à 8^h37^m, heure à laquelle le ciel est complètement couvert. Grossissement : 280 fois; agitations atroces.

Je crois dédoubler un instant la Baie fourchue *a*; l'embouchure de l'Indus *b* bien visible; le Deuteronilus *c* et le Nilokeras *d* sont rosés; il y a trace d'Achillis Pons; lacus Hyperboreus bien séparé de Mare Acidalium; outre la tache polaire, le dessin présente au bord trois régions blanches et brillantes; la région *e*, moins blanche et moins brillante que les autres, correspond à Noachis et à Argyre.

6 juillet, de 8^h15^m *à* 8^h29^m *environ;* L = 31°5 ± ; *fig. 4*.

Gr. : 280, 420, 450, 250, 180; observation difficile; agitations; ondulations; détails certains néanmoins. On continue jusqu'à 8^h45^m.

Argyre brille en haut du disque, en *a*; Deuteronilus visible et lacus Ismenius bien marqué; cette région est rouge; je vois aussi Callirrhoe en *b*; Tempe blanc; il y a encore trace de Pyrrhae et de Protei regio, et de Deucalionis regio entre la Baie fourchue et l'embouchure de l'Indus.



21 avril, de 10ʰ20ᵐ à 10ʰ45ᵐ; L = 42°; *fig. 5.*

Gr. : 280, 420, 150, 650; on continue l'observation jusqu'à 11ʰ44ᵐ.

Outre les détails signalés dans les dessins précédents, je mentionne la *trace* de lacus Solis et de lacus Tithonius en haut du disque; la teinte rose du Deuteronilus, du lacus Ismenius et du Nilokeras; la trace de Callirrhoe en *a*, le Tanaïs en *b*; l'éclat de Tempe; le pons Achillis certain avec le grossissement de 280 fois à 11ʰ29ᵐ; le lacus Niliacus est plus pâle que Mare Acidalium; le lacus Hyperboreus parfaitement séparé de Mare Acidalium à 11ʰ34ᵐ avec le grossissement de 150 fois; ce grossissement montre aussi très bien la tache polaire qui, avec 650, à 11ʰ44ᵐ, apparait admirablement comme une petite ellipse tout entière dans l'hémisphère visible et tangente au bord, *fig. 5a.* Le Nilokeras *c* se prolonge à droite, en *d*, par une bande large et rose qui correspond à l'Uranius et au Gigas.

27 mai, de 7ʰ57ᵐ à 8ʰ4ᵐ; L = 42°9; *fig. 6.*

Gr. : 420, 280, 450, 250; on finit à 9ʰ13ᵐ.

Outre les détails précédents, mentionnons ici, en *a*, le Gange aboutissant au lac de la Lune *b*; l'Indus-Oxus, *c*, se rendant au Deuteronilus; une trace d'Hiddekel, *d*, allant au lacus Ismenius; la teinte plus claire du Niliacus lacus, la trace du pont d'Achille; enfin Argyre en haut du disque, visible surtout à 8ʰ28ᵐ avec le grossissement 250, plus petite que la tache polaire et brillante comme elle. De même, avec 250, j'aperçois une seule fois, mais d'une façon certaine, un petit point noir en haut du disque, correspondant sans doute au lac du Soleil ou au lac Tithonius.

22 avril, de 11ʰ32ᵐ à 11ʰ42ᵐ; L = 49°3; *fig. 7.*

Gr. : 250, 280; les nuages surviennent ensuite; agitations.

Cette observation confirme les précédentes.

25 mai, de 7ʰ50ᵐ à 8ʰ5ᵐ; L = 60°6; *fig. 8.*

Gr. : 280, 420, 560. Les nuages interrompent l'observation à 8ʰ25ᵐ.

Je vois faiblement le Gange, *a*, et mieux l'Indus, *b*; j'aperçois Argyre en *c* à 8ʰ18ᵐ; j'ai vu, en *d*, sur la côte de Mare Acidalium, pendant un

instant trop court pour permettre le dessin de ce détail, une échancrure et une proéminence tout à fait certaines.

Comme moyen d'épreuve, je note, à 8^h18^m, que le Gange paraît presque au méridien central du disque; *cette observation donne pour longitude approchée de ce canal 65°6, ce qui concorde assez bien avec la carte de Milan,* si l'on a égard à la difficulté de cette observation.

24 mai, de 8^h13^m à 8^h23^m; L = 74°7; *fig. 9.*

Gr. : 280, 420; on observe jusqu'à 9^h8^m.

Le Gange est certain, mais seulement par moments; il aboutit à une tache noire, *b*, le lac de la Lune; le contour de Tempe s'accuse nettement comme le périmètre d'un polygone; on voit donc, en *a*, le Nilokeras; en *c*, le Nilus; en *d*, le Ceraunius; et aussi en *e*, le Tanaïs. Argyre brille d'un blanc de neige.

23 mai, de 8^h23^m à 8^h33^m; L = 86°3; *fig. 10,*

Gr. : 280, 420, 450, 250. Observation finie à 9^h22^m. J'ai observé aussi de 7^h58^m à 8^h23^m.

Le Gange est certain par moments, mais difficile; outre les détails mentionnés dans la *fig. 9* et marqués des mêmes lettres, on voit, en *f*, le Jaxartes.

16 avril, de 10^h34^m à 10^h57^m environ; L = 89°1 ±; *fig. 11.*

Gr. : 280, 420, 450; on continue jusqu'à 11^h39^m.

Je vois en haut du disque le golfe de l'Aurore avec le lac du Soleil et le lac Tithonius; c'est la seule fois que j'ai aperçu ces deux lacs avec autant de netteté; ils sont reliés au golfe de l'Aurore par le Nectar et par l'Agathodæmon. Thaumasia est très blanche au-dessus de Solis lacus. Dans le reste du dessin, je ne dois faire remarquer que la zone rose qui traverse le disque et s'étend au delà du Ceraunius, probablement dans Uranius et Gigas. A 11^h32^m, avec 280, je vois la Propontide qui apparaît au bord droit à la suite du Tanaïs (v. *fig. 11a*).

29 juin, de 8^h45^m à 9^h environ; L = 105°8 ±; *fig. 12.*

Gr. : 420, 280, 560. Horriblement ondulant.

Avec 280, la zone centrale est très rouge; c'est probablement le Gigas ou le Phlegethon qui prolonge le Nilus.

20 mai, de 8h20m à 8h35m ±; L = 113°6 ±; *fig. 13.*

Gr. : 450, 420, 280; observation prolongée jusqu'à 9h30m.

Par son extension, la bande centrale dépasse évidemment les limites du Nilus et doit se prolonger dans le Gigas ou le Phlegethon; elle tend à disparaître à 9h30m.

La région située au-dessus de la tache supérieure est blanche; à 9h13m cette blancheur se réduit et l'on ne voit plus que l'apparence d'une très petite tache polaire au bord sud du disque, diamétralement opposée à la tache polaire nord. A 9h13m la longitude du méridien central était 124°7; cette petite tache blanche devait avoir à peu près cette longitude. Peut-être se confond-elle avec la région pointillée située à gauche de Thyle I dans la carte de M. Schiaparelli (opposition de 1881-1882) et ayant pour longitude sur cette carte 120°; peut-être était-ce Thyle I elle-même.

14 avril, de 10h52m à 11h42m; L = 114°2; *fig. 14.*

Gr. : 280, 420. Observation jusqu'à 12h15m.

Traces de lacus Solis et de lacus Tithonius à gauche du disque; bande rose centrale; Tanaïs en dessous; la Propontide apparait au bord droit à 12h15m.

27 juin, de 8h16m à 8h26m; L = 117°1; *fig. 15.*

Gr. : 560, 420, 280, 450; ondulant, agité.

La bande centrale est rouge avec 560; tout est très faible.

18 mai, de 8h51m à 9h; L = 138°6; *fig. 16.*

Gr. : 280; observation continuée jusqu'à 10h40m. Mauvais, agité; à 9h30m l'image devient meilleure; puis agitations atroces.

La région blanche du bord supérieur gauche semble correspondre à Thaumasia et à Thyle I. Mare Sirenum apparait en haut du disque; *la tache polaire septentrionale est double;* on lui voit un petit compagnon, certain par moments, à 9h40m; ce compagnon est moins blanc et moins brillant que la tache polaire principale; les deux amas neigeux sont séparés par le filet noir signalé aussi par MM. Schiaparelli et Perrotin.

24 juin, de 8^h3^m à 8^h35^m; L = 145°3; *fig. 17.*

Gr. : 450, 280, 420, 250; observation continuée jusqu'à 8^h48^m; quelques nuages; trop de mouvements et d'ondulations. Détails certains.

Deux régions blanches, l'une au bord gauche, l'autre au bord supérieur; la bande centrale semble se terminer ici; sa position semble indiquer que l'Achéron contribue aussi à cette apparence.

20 mai, de 10^h45^m à 11^h5^m ±; L = 149°5 ±; *fig. 18.*

Gr. : 280, 250, 180; observation continuée jusqu'à 11^h15^m.

La tache polaire est double, même avec 180; à 11^h15^m on voit apparaître le point sombre *a*, probablement Trivium Charontis; en *b*, la Propontide.

8 avril, de 10^h53^m à 11^h20^m ±; L = 163°9 ±; *fig. 19.*

Gr. : 150, 250, 450, 420, 280; on continue jusqu'à 12^h.

Le grossissement 420 semble dédoubler la Propontide par l'apparition du Pont d'Hercule; l'ombre *a* est Hades se rendant à Trivium Charontis. Un point blanc brillant se remarque au bord gauche inférieur.

13 mai, de 8^h7^m à 8^h16^m; L = 173°; *fig. 20.*

Gr. : 280, 250; on finit à 9^h40^m.

En *a*, le Sinus Titanum; en *b*, avec 250, on soupçonne une ombre légère qui longe le bord; en *d*, l'Erebus; en *c*, le Trivium Charontis sous forme de tache plus noire à 9^h3^m; en *g*, le Cerberus; en *e*, la Propontide avec le Pont d'Hercule. Trois points blancs au bord inférieur du disque : d'abord moins blancs et moins brillants que la tache polaire, ces points deviennent de plus en plus brillants et blancs en approchant du limbe, où ils débordent comme la tache polaire et rivalisent d'éclat et de blancheur avec elle.

A 8^h47^m, avec 250, on voit apparaître au bord, en *f*, une tache très noire, probablement Fretum Anian (v. *fig. 20a*).

Mais l'intérêt principal de l'observation de ce jour réside dans la constatation du filet noir de la tache polaire (*fig. 20* et *fig. 20a*). La région blanche séparée de la tache polaire par ce filet était moins blanche et moins brillante que la tache polaire proprement dite et tournait autour du pôle,

comme on peut s'en assurer par son déplacement très sensible déjà à 9^h3^m (v. *fig. 20a*).

Le Trivium Charontis apparait par moments comme une tache isolée de 9^h3^m à 9^h40^m.

5 avril, de 10^h21^m à 10^h41^m; L = 181°5; *fig. 21.*

Gr. : 250, 280; agité et ondulant.

La Propontide semble partagée en deux par Herculis pons; elle envoie deux prolongements, l'un, *a*, correspond au canal Hades, l'autre, *b*, semble être le canal Pyriphlegethon. Des amas blancs et neigeux se trouvent au bord inférieur.

12 mai, de 8^h15^m à 8^h28^m; L = 184°5; *fig. 22.*

Gr. : 280, 250, 420, 450. L'observation est continuée jusqu'à 9^h8^m.

La bande du bord gauche supérieur paraît double, probablement à cause de la présence de Phaetontis, Electris et Eridania, séparant Mare Chronium de Mare Sirenum et de Mare Cimmerium. Une ombre paraît encore en *a*, le long du bord gauche; au bord inférieur, deux petits disques moins blancs et moins brillants que la tache polaire; en *b*, Erebus; en *c*, Cerberus; en *d*, Styx; en *e*, Propontide avec division certaine (Herculis pons).

La tache polaire est partagée en deux par un filet noir.

12 mai, de 9^h12^m à 9^h18^m; L = 197°5; *fig. 23.*

Gr. : 250, 280. Cette observation a suivi la précédente et a été continuée jusqu'à 10^h48^m. Les progrès de la rotation amènent un des points blancs du bord inférieur en contact avec le limbe et ce point y déborde comme la tache polaire. On voit se dessiner le contour complet d'Elysium et le Cerberus semble se prolonger, en *g*, jusqu'au contact de la mer Cimmérienne; il y a là évidemment un effet de la présence du Cyclopum, que, pourtant, je ne parviens pas à distinguer nettement.

La tache polaire satellite, séparée par le filet noir, continue son mouvement autour du pôle; son aspect est relevé successivement à 9^h43^m (*fig. 23a*), puis à 10^h28^m (*fig. 23b*). Par moments le filet noir prend l'aspect d'un point noir perdu dans la tache polaire.

5 avril, de 11^{h}46^m à 12^{h}1^m; L = 201°6; *fig. 24.*

Gr. : 280; observé jusqu'à 12^{h}6^m.

En *a* figure la baie du Laestrygonum reliée à l'Eunostos par l'Antée; celui-ci est d'apparence excessivement fugitive; *α* est Thyle II.

3 avril, de 10^{h}8^m à 10^{h}53^m, j'observe sans dessiner; agitations atroces.

Gr. : 150, 250, 450, 650, 180, 280. Le dessin du 1er avril est confirmé. On voit Elysium; la tache polaire nord se voit tout entière, de forme elliptique; une teinte rouge règne surtout dans le quart inférieur droit du disque. Il y a deux taches brillantes au moins, en bas du disque, à gauche du diamètre vertical; la région située au-dessus de Mare Cimmerium n'est pas aussi blanche que le 1er avril; Thyle I et Thyle II occupent alors le haut du disque.

De 11^{h}1^m à 11^{h}13^m; L = 207°7; *fig. 25.*

Gr. : 250, 280; trop agité et trop ondulant; observé jusqu'à 12^{h}18^m.

Elysium est à peine plus blanc que le reste. A 11^{h}13^m le haut du disque devient plus blanc, d'aspect neigeux; *a* est Thyle II. Deux points blancs sont au bord inférieur. Je vois des dentelures certaines au bord de Mare Cimmerium, mais d'une façon trop fugitive. A 12^{h}2^m je note qu'Elysium est au méridien central; cette observation donne pour longitude aréographique du centre d'Elysium : 221°2, résultat qui offre un accord remarquable avec la carte de M. SCHIAPARELLI.

10 mai, de 8^{h}31^m à 9^{h}11^m; L = 209°6; *fig. 26.*

Gr. : 420, 450, 280; observation continuée jusqu'à 9^{h}41^m.

Je vois la baie du Laestrygonum *a;* suivant la flèche qui est à sa gauche on soupçonne par moments un trait clair qui doit correspondre aux Atlantides; de même, à 9^{h}16^m, suivant la flèche *b,* règne une clarté qui est l'Hespérie. Elysium n'est ni blanc ni brillant.

A 9^{h}41^m, je relève l'aspect de la *figure 26a;* on y voit, en *a,* un vestige du Cyclops et, en *b,* le Triton.

11 mai, de 9^h31^m à 9^h44^m; L = 212°; *fig. 27.*

Gr. : 420, 280, 250; observation jusqu'à 10^h39^m.

Je note comme certaine la séparation *a* entre le Styx et la Propontide. Le contour d'Elysium est rosé; cette teinte est surtout accusée pour le Cerberus. Je vois, en *b*, l'Antée et la baie du Laestrygonum; mais le Cyclopum *c* ne se dessine pas nettement; en *d*, le Triton. A 10^h29^m, 250 me montre l'Hespérie. A 10^h39^m, le Cerberus a une apparence douteuse de gémination, comme si, à son extérieur, régnait une zone rose plus faible.

9 mai, de 8^h26^m à 8^h41^m; L = 214°3; *fig. 28.*

Gr. : 280, 420, 450. Image trop agitée.

Le Cerberus *a* me parait prolongé jusqu'à la mer Cimmérienne.

1er avril, à 10^h27^m; L = 215°5; *fig. 29.*

Gr. : 250, 280, 450, 420; grandes agitations; on observe jusqu'à 11^h27^m.

Les régions centrales sont rouges, les bords sont jaunes ou blancs. La tache polaire est très blanche et très brillante, de même que les régions blanches du bord supérieur; *b* est Thyle II; vient ensuite, dans l'ordre décroissant d'éclat neigeux, le point blanc *a* au bord inférieur, puis enfin Elysium qui brille sans éclat neigeux bien caractérisé.

Elysium est au méridien central à 10^h47^m, ce qui donne pour la longitude de son centre 220°4, en accord parfait avec la carte de Milan.

9 mai, de 9^h10^m à 9^h29^m; L = 225°5; *fig. 30.*

Gr. : 420, 280. Agitations atroces.

Elysium est peu brillant et n'est nullement blanc; observation difficile. La région *a* est très blanche et très brillante. Je soupçonne une fois l'Antée en *b*. Cerberus se prolonge en apparence jusqu'à la mer Cimmérienne, vision imparfaite du Cyclopum.

14 juin, de 7^h55^m à 8^h2^m; L = 234°8; *fig. 31.*

Des nuages passent; mouvements; dessin incomplet. Le Cyclope reste douteux; Cerberus se voit bien.



De 8^h57^m à 9^h12^m; gr. : 280, 250; je continue l'observation; l'image est trop ondulante et trop agitée pour la dessiner. Cerberus est au bord gauche; on voit un peu Elysium; le Cyclope reste incertain; le Thoth, la grande Syrte, la Boréosyrte, très noire, apparaissent au bord droit.

11 mai, de 11^h6^m à 11^h24^m; L = 235°7; *fig. 32.*

Gr. : 280; observation continuée jusqu'à 11^h49^m.

Par moments, on soupçonne le Cyclopum *c*, mais cette apparition reste excessivement douteuse; le Cerberus a une apparence de gémination comme à 10^h39^m, *fig. 27;* les canaux qui forment le périmètre d'Elysium sont roses. La bande supérieure est traversée par un filet clair *a*, apparaissant par moments assez rares; c'est l'Hespérie; elle aboutit entre le Triton *b* et le Lethes *d*, prolongement de Syrtis minor; ces deux canaux forment un ensemble triangulaire et grisâtre, pâle dans sa partie médiane *e*, qui est la portion septentrionale de l'Hespérie; par leur réunion, ils se continuent dans le Thoth, *t*, lequel finit à Alcyonius, *g*. Au bord, en *n*, apparait la Nilosyrte. La tache polaire est entourée d'un fil très noir. La région *h* (Libye) est très blanche.

La tache la plus sombre est Alcyonius *g*.

A 11^h34^m j'ai noté le Cyclops comme assez certain(?).

10 mai, de 10^h31^m à 11^h1^m; L = 237°6; *fig. 33.*

Gr. : 450, 420, 280; continué jusqu'à 11^h41^m.

Ce dessin renferme les mêmes détails à peu près que les figures précédentes; c'est à cette date que j'ai, la première fois, trouvé l'explication du singulier aspect que m'offrait le Triton; ce canal me paraissait large et grisâtre, blanchâtre même; la *figure 33*, comme la *figure 32*, montre que cet aspect est dû à la confusion du Triton et du Lethes ou de la petite Syrte; la teinte grisâtre provenait de la partie septentrionale de l'Hespérie, *e*, située entre ces deux canaux. Par moments, de 11^h6^m à 11^h11^m, il y a trace de l'Hespérie, *a*, aboutissant entre les deux pointes du Triton, *b*, et de la petite Syrte ou du Lethes, *d*. (Voyez aussi *fig. 33a* et *33b*.) Le Triton aboutit à une tache noire, *k*, qui pourrait être l'extrémité du Nepenthes (?).

En *m* on voit une tache blanche ressemblant à une tache polaire, proba-

blement Hellas. Cerberus et Eunostos sont rouges; en *o* se voit Ætheria sous l'aspect d'un second Elysium plus restreint.

De 11^h6^m à 11^h41^m on voyait le Thoth relié à Alcyonius comme dans la *fig. 32.*

9 mai, de 10^h40^m *à* 11^h2^m*;* L = 247°8; *fig. 34.*

Gr. : 280; image détestable; agitation continuelle; on continue jusqu'à 11^h22^m.

On retrouve encore ici le Triton, *b*, se réunissant au Thoth, *t*; il y a confusion avec le Lethes ou la petite Syrte, *d*, produisant l'aspect grisâtre signalé plus haut; cet ensemble imite, à s'y méprendre, la grande Syrte lorsqu'elle est au bord. Il y a apparence imparfaite du Cyclopum. En *c*, blancheur marquée.

A 11^h22^m l'aspect était tel que je le figure dans *l'esquisse 34a* : *b*, Triton et Syrtis minor avec Lethes; *t*, Thoth; *g*, Alcyonius; *n*, Nepenthes; *s*, grande Syrte; *m*, Nilosyrte; *o*, Elysium.

21 juillet, de 8^h26^m *à* 8^h30^m ± ; L = 248°8 ±; *fig. 35.*

Gr. : 280, 450, 250; agitations; ondulations; images mauvaises.

12 juin, de 8^h9^m *à* 8^h24^m; L = 258°; *fig. 36.*

Gr. : 280, 250, 450, 420. Observé jusqu'à 8^h52^m, puis nuages.

On voit, en *a*, une apparence du Cyclopum qui semble certaine; en *b*, le Thoth; en *c*, la grande Syrte; un canal, *d*, va de l'Eunostos à la Boréosyrte.

27 mars, de 10^h27^m *à* 10^h40^m*;* L = 261°; *fig. 37.*

Gr. : 150, 250; agitations atroces; vent fort.

9 mai, de 11^h57^m *à* 12^h3^m*;* L = 264°6; *fig. 38.*

Gr. : 280. *a*, Triton; *b*, Nepenthes; *c*, Thoth; *d*, Libye.

11 juin, de 8^h8^m *à* 8^h33^m ± ; L = 268°4 ±; *fig. 39.*

Gr. : 280, 420, 450, 250; mauvais, ondulant.

On soupçonne le Cyclope, *c*; Cerberus, *b*, très visible; *d*, Thoth bien marqué; les régions marquées *a* plus brillantes; ce sont : Æolis, Elysium, Isidis regio, en allant du bord occidental au bord oriental.

5 mai, de 11^{h}8^m à 11^{h}20^m; L = 289°1; *fig. 40.*

Gr. : 280, 420, 450; agité, mauvais. Observé jusqu'à 12^{h}24^m.

Mare Tyrrhenum très pâle, *a*; *b*, Triton; *c*, Nepenthes; *d*, Thoth; *e*, Nilosyrte; *f*, Boréosyrte; *g*, Astusapes; *h*, Protonilus. Comme le représente le dessin, la Nilosyrte me semblait séparée de la grande Syrte. Les régions blanches des bords sont toutes brillantes.

29 avril, de 8^{h}9^m à 8^{h}24^m; L = 298°9; *fig. 41.*

Gr. : 280, 560, 420, 450; observé jusqu'à 9^{h}9^m.

Une très petite tache blanche, brillante, neigeuse, est au-dessus de la grande Syrte, au bord du disque, *a*; autour d'elle, région blanche; plusieurs régions blanches sont figurées dans le dessin; en *b*, le Thoth; en *c*, la Nilosyrte qui paraît séparée de la grande Syrte; en *d*, la Boréosyrte; en *e*, le Protonilus avec *f*, Lacus Ismenius; en *g*, Callirrhoe.

Protonilus et Callirrhoe ont semblé diverger en allant au bord oriental.

29 avril, de 10^{h}19^m à 10^{h}29^m; L = 330°; *fig. 42.*

Gr. : 420, 280, 560, 450, 650; observation poursuivie jusqu'à 11^{h}24^m.

Le lacus Ismenius *a*, rougeâtre à 10^{h}59^m, paraît par moments comme une tache isolée; je vois, *sans le moindre doute*, le Phison *b*, comme un ruban rosé, large et faible, rectiligne; n'est-il pas double? Je note l'Orontes-Typhonius comme certain, *c*; on voit nettement Protonilus *d*, Deuteronilus *e*, et Callirrhoe *f*.

Hellas, *h*, est d'un blanc mat, bien limitée. A la fin, à 11^{h}24^m, avec 280, 450 et 650, la Baie fourchue *g* est dédoublée.

26 avril, de 8^{h}50^m à 9^{h}1^m; L = 334°8; *fig. 43.*

Gr. : 280; ondulations trop fortes.

On voit le Protonilus, *a*; Hellas, *h*, est ronde, bien limitée et d'un blanc brillant; *b* est Noachis et Argyre.

29 avril, de 11^{h}34^m à 11^{h}42^m; L = 348°; *fig. 44.*

Gr. : 280; on continue jusqu'à 12^{h}19^m.

Hellas est blanche et brillante; la Baie fourchue est dédoublée; la baie

du Phison, *a*, est bien visible; l'Indus paraît se prolonger jusque dans le Deuteronilus, par l'Oxus, comme si le Deuteronilus était la continuation naturelle de l'Indus-Oxus. Le lacus Ismenius est bien visible et paraît par moments comme une tache isolée. Tempe brille au bord droit, d'un éclat blanc neigeux; en *b*, on voit le Nepenthes.

2 juin, de 8ʰ14ᵐ à 8ʰ39ᵐ; L = 353°8; *fig. 45.*

C'est l'une des rares soirées *passables* qui se soient présentées pendant cette opposition; nous serions peut-être plus dans le vrai en disant que c'est *la seule* soirée passable.

J'observe depuis 7ʰ44ᵐ; l'image est d'un calme assez satisfaisant; grossissements : 450, 420, 280, 250. Je vois l'Orontes-Typhonius *a*, le Phison *b*, Édom promontorium *c*.

De 8ʰ14ᵐ à 8ʰ39ᵐ, j'emploie de nouveau les grossissements 450, 280, 420, 650, 250; je continue l'observation jusqu'à 9ʰ33ᵐ.

Avec 280 le Phison semble double comme je le représente; Edom promontorium est blanc brillant; par moments la Baie fourchue semble se prolonger vers le nord; avec 650 on croit la dédoubler par instants. Tempe est blanc et brillant, mais moins que la tache polaire. Je vois aussi l'Indus-Oxus *d*, à 9ʰ33ᵐ, avec 280. Il y a une région blanche *e*, au bord supérieur, correspondant à Noachis.

Sur un avis de M. Schiaparelli, j'ai dirigé toute mon attention sur la région de l'Euphrate, alors bien visible et géminé à Milan, avec le 18 pouces; mais je n'ai pu découvrir ce canal.

1ᵉʳ juin, de 7ʰ54ᵐ à 8ʰ14ᵐ; L = 357°6; *fig. 46.*

Gr. : 450, 250, 280; observé jusqu'à 8ʰ58ᵐ.

Tout le centre est rouge avec 450. *On voit le Phison et il semble double;* on voit aussi l'Orontes-Typhonius, et, près de l'extrémité nord du Phison, une dentelure *a* dirigée vers le sud : c'est la naissance d'Astusapes.

250 fait voir par instants trop fugitifs *une foule de détails* à droite de la grande Syrte; ces apparitions ont trop peu de durée pour en fixer l'image. A la fin, on voit l'Indus (8ʰ58ᵐ); Tempe brille et est blanchâtre.

26 avril, de 10^h20^m à 10^h44^m; L = 358°4; *fig. 47.*

Gr. : 450, 280; fin à 11^h47^m; agitations continuelles.

Vers 10^h49^m, un moment, je dédouble la Baie fourchue avec 450.

11^h34^m, le bord gauche est très blanc, dans la région Aëria; l'Indus s'allonge beaucoup. Tempe est blanc, brillant; on voit Protei regio.

III. — Tableau des observations dans l'ordre de date.

1888.

JOUR.	Heure moyenne (*).	Longitude du méridien central.	Figure.	JOUR.	Heure moyenne (*).	Longitude du méridien central.	Figure.
27 mars . .	$10^h33^m30^s$	261°	37	11 mai. . .	$11^h15^m0^s$	235°7	32
1er avril. .	10 27 0	215 5	29	12 — . . .	8 21 30	184 5	22
3 — . .	11 7 0	207 7	25	— — . . .	9 15 0	197 5	23
5 — . .	10 31 0	181 5	21	13 — . . .	8 11 30	173	20
— — . .	11 53 30	201 6	24	18 — . . .	8 55 30	138 6	16
8 — . .	11 6 30±	163 9±	19	20 — . . .	8 27 30±	113 6±	13
14 — . .	11 17 0	114 2	14	— — . . .	10 55 0±	149 5±	18
16 — . .	10 45 30±	89 1±	11	23 — . . .	8 28 0	86 3	10
19 — . .	8 20 30	27 6	3	24 — . . .	8 18 0	74 7	9
21 — . .	10 31 30	42 0	5	25 — . . .	7 57 30	60 6	8
22 — . .	11 37 0	49 3	7	27 — . . .	8 0 30	42 9	6
26 — . .	8 55 30	334 8	43	31 — . .	9 23 0±	26 1±	2
— — . .	10 32 0	358 4	47	1er juin. .	8 4 0	357 6	46
29 — . .	8 16 30	298 9	41	2 — . .	8 26 30	353 8	45
— — . .	10 24 0	330	42	11 — . .	8 20 30±	268 4±	39
— — . .	11 38 0	348	44	12 — . .	8 16 30	258	36
5 mai. . .	11 14 0	289 1	40	14 — . .	7 58 30	234 8	31
9 — . .	8 33 30	214 3	28	24 — . .	8 19 0	145 3	17
— — . .	9 19 30	225 5	30	27 — . .	8 21 0	117 1	15
— — . .	10 51 0	247 8	34	29 — . .	8 52 30±	105 8±	12
— — . .	12 0 0	264 6	38	6 juillet. .	8 22 0±	31 5±	4
10 — . .	8 51 0	209 6	26	9 — . .	8 43 30	8	1
— — . .	10 46 0	237 6	33	21 — . .	8 28 0±	248 8±	35
11 — . .	9 37 30	212	27				

(*) Heure moyenne entre l'heure du commencement et l'heure de la fin du dessin.

IV. — Observations de la Libye.

Voici la série des remarques que j'ai pu faire sur cette région de la planète :

Le 29 avril, de 8^h9^m à 9^h9^m, fig. 41, la Libye s'approche trop du bord pour être bien observée; je cherche à voir le Nepenthes, mais ce canal et la mer Tyrrhénienne se confondent dans une région grisâtre où se cache la Libye; *de 11^h34^m à 12^h19^m, fig. 44,* la Libye apparaît au bord du disque comme une région brillante au-dessus de la pointe noire *b* qui représente le Nepenthes.

Le 5 mai, de 11^h8^m à 12^h24^m, fig. 40, je vois très bien la Libye, brillante, entre le Nepenthes *c* et la mer Tyrrhénienne *a*.

Le 9 mai, de 11^h57^m à 12^h3^m, fig. 38, je vois encore très bien la Libye, en *d*.

Le 10 mai, de 10^h31^m à 11^h41^m, fig. 33, la Libye *h*, au bord oriental, est d'un blanc marqué.

Le 11 mai, de 9^h31^m à 10^h39^m, fig. 27, la Libye *h* est blanche au bord oriental du disque; elle est notée comme très blanche le même jour, de 11^h6^m à 11^h49^m, *fig. 32,* en *h*.

En juin, l'observation de la Libye était devenue trop difficile, *fig. 36* et *fig. 39.*

V. — Observations des taches polaires et spécialement du fil noir dans la tache polaire boréale.

La tache polaire nord a été constamment visible, blanche, brillante et réduite à de très faibles dimensions; dans les meilleurs moments d'observation et surtout avec les grossissements 450 et 650, je voyais parfaitement sa forme elliptique et je constatais que cette ellipse était tout entière à l'intérieur du disque visible, tangente au limbe. Voir *fig. 5a,* etc.

Au bord sud régnait toujours une blancheur marquée, comme on le constate

dans presque tous les dessins; de plus, on voyait apparaître, de temps en temps, dans ces régions blanchâtres, des taches éclatantes, neigeuses, bien définies, mais qu'en général je ne crois pas appartenir à la tache polaire méridionale proprement dite : elles s'expliquent par la présence de régions spéciales dont il sera question plus loin, telles que : Hellas, Argyre, Thyle, Noachis? Thaumasia? notamment.

Seule la très petite tache blanche et brillante, tout à fait semblable à une tache polaire, observée au sud, *le 29 avril,* au-dessus de la grande Syrte (voir *fig. 41, a*), me laisse quelque doute sur sa nature et fait peut-être partie de la tache polaire méridionale généralement invisible en 1888; ou faudrait-il y voir Novissima Thyle que sa latitude trop méridionale semblait devoir cependant soustraire aux regards?

Passons à la particularité la plus intéressante offerte en 1888 par la tache polaire boréale, *particularité observée indépendamment à Milan, à Nice et à Louvain*, je veux dire *la présence du filet noir partageant cette calotte neigeuse en deux parties.* Voici les observations que j'ai pu faire à l'aide de l'excellent instrument de Sir Howard Grubb :

Déjà un peu avant le 12 mai, j'avais remarqué quelque chose d'insolite dans cette tache polaire; malheureusement je pris le fait pour une illusion au milieu des mauvaises conditions de l'image et je n'en tins pas note. *Le 12 mai* seulement, *de 8^h15^m à 9^h8^m, fig. 22,* je vis que la tache polaire nord se composait de deux parties séparées par un fil noir comme de l'encre; la partie située du côté du bord oriental (considéré géocentriquement) était plus petite que l'autre. Je suivis encore la tache polaire *de 9^h12^m à 10^h28^m,* le même jour, *fig. 23, fig. 23a* et *fig. 23b,* et le mouvement de rotation de la petite tache satellite autour du pôle était très sensible comme le montrent ces figures. Par moments, le filet noir prenait l'aspect d'un point noir isolé au milieu des neiges polaires.

On voit que *vers 9^h43^m, fig. 23a,* le centre de la tache polaire satellite atteignit le méridien central; *nous trouvons de cette façon, pour ce milieu, une longitude approchée de 204°3.*

Vers 10^h28^m, fig. 23b, son *extrémité la plus orientale* (vue de la terre) est près du méridien central, *ce qui donne la longitude de 215°3.*

Le 13 mai, de 8^h7^m *à* 9^h40^m, *fig. 20 et 20a*, j'ai revu le filet noir; ces dessins montrent encore le déplacement de la tache polaire satellite par l'effet de la rotation; j'ai constaté que ce compagnon des neiges polaires était moins brillant et moins blanc que la tache polaire proprement dite; en d'autres termes, l'éclat blanc était maximum dans la tache polaire la plus développée et autour de laquelle s'effectuait le mouvement de rotation de la tache satellite.

La figure 20a nous montre l'extrémité occidentale de la tache polaire satellite près du méridien central, à 9^h3^m, ce qui correspond à la longitude de 185°6.

Ces observations nous donnent donc comme résultats approchés :

Longitude aréographique de l'extrémité occidentale de la tache polaire satellite : 185°6.

Longitude aréographique de l'extrémité orientale : 215°3.

Moyenne, ou longitude du milieu : 200°45.

Longitude aréographique du milieu d'après l'observation directe : 204°3.

N'oublions pas que ces données sont déduites *de nos dessins* et nullement d'observations faites *directement dans ce but.* La concordance entre la moyenne des résultats obtenus pour les deux extrémités de la tache et le résultat obtenu directement par le dessin pour le milieu de l'amas neigeux supplémentaire est néanmoins très remarquable; *et nous pouvons attribuer au milieu de la tache satellite, comme très approchée, la longitude de 200° environ.*

Le 18 mai, de 8^h51^m *à* 10^h40^m, *fig. 16,* j'ai encore observé le petit compagnon de la tache polaire, toujours moins blanc et moins brillant que celle-ci.

Le 20 mai, de 10^h45^m *à* 11^h15^m, *fig. 18,* il était visible même avec le grossissement de 180 fois.

VI. — Observations des régions blanches et brillantes autres que les taches polaires.

A. — Points brillants et blancs sur le prolongement de l'Erebus.

Lorsque l'Elysium ou le Trivium Charontis occupaient la moitié orientale ou droite du disque apparent, j'ai toujours aperçu, au bord occidental ou gauche, et sur le prolongement de l'Erebus, des points ou petits disques blancs plus ou moins brillants, au nombre de trois dans les circonstances les plus favorables, occupant les sommets d'un triangle; ces points figurent dans douze de mes dessins (*fig. 29, 25, 21, 24, 19, 28, 30, 26, 27, 22, 23, 20,* dans l'ordre de date).

Ces points brillants n'ont été vus qu'alors qu'ils s'approchaient du bord occidental du disque, et ils devenaient de plus en plus visibles, de plus en plus blancs et brillants à mesure qu'ils s'en approchaient davantage, au point de finir par y déborder par irradiation comme la tache polaire. Nous ne les avons pas observés dans le voisinage du méridien central, ni au bord oriental, et ne saurions fixer leur position autrement que d'une façon très approchée par le procédé suivant : *le 9 mai, de* $9^h 10^m$ *à* $9^h 29^m$, *fig. 30,* ces points brillants se trouvaient à l'extrême bord alors que la longitude du méridien central était 225°5; ils pouvaient donc avoir une longitude approchée de 135°. D'autre part le prolongement de l'Erebus rencontre cette longitude sous une latitude aréographique d'environ + 40°; *nous pouvons donc estimer, comme une approximation provisoire, la longitude de ces points voisine de 135° et leur latitude voisine de + 40°. Ces points neigeux se trouvaient donc dans une région assez proche de celle où M.* Schiaparelli, *en 1879, constata l'existence d'un prolongement neigeux et brillant de la tache polaire et même une tache neigeuse isolée qu'il a appelée Nix Olympica* [1].

[1] Deuxième mémoire dans les *Mém. de l'Acad. roy. des Lincei,* sér. III, vol. 10; §§ 370, 431.

Voici le détail de nos observations sur ces points remarquables, dans l'ordre de date :

1er avril, de $10^h 27^m$ à $11^h 27^m$, fig. 29; un point *a* est blanc, brillant, un peu moins que la tache polaire.

3 avril, de $10^h 8^m$ à $12^h 18^m$, fig. 25; au moins deux points brillants, bien définis, près du diamètre vertical, en bas du disque; neigeux à $11^h 13^m$.

4 avril, de $10^h 23^m$ à $11^h 53^m$, deux points neigeux.

5 avril, de $10^h 21^m$ à $10^h 41^m$, fig. 21; trois régions blanches, neigeuses, en bas du disque; α surtout brille. — *De $11^h 46^m$ à $12^h 6^m$, fig. 24,* un point brillant et blanc.

8 avril, de $10^h 53^m$ à 12^h, fig. 19; un point brillant et blanc.

9 mai, de $8^h 26^m$ à $8^h 41^m$, fig. 28, et *de $9^h 10^m$ à $9^h 29^m$, fig. 30;* deux points blancs et brillants.

10 mai, de $8^h 31^m$ à $9^h 41^m$, fig. 26; deux petits disques blancs.

11 mai, de $9^h 31^m$ à $10^h 39^m$, fig. 27; deux petits disques blancs et brillants. — *De $11^h 6^m$ à $11^h 49^m$,* il y avait encore une région blanche au bord inférieur gauche, *fig. 32.*

12 mai, de $8^h 15^m$ à $9^h 8^m$, fig. 22; deux petits disques blancs, moins blancs et moins brillants que la tache polaire. — *De $9^h 12^m$ à $10^h 28^m$, fig. 23,* les deux points sont blancs et brillants; le disque le plus rapproché du diamètre vertical arrive au limbe où il déborde comme la tache polaire.

13 mai, de $8^h 7^m$ à $9^h 40^m$, fig. 20. Trois petits disques, α, β, γ; α est au bord, très brillant, très petit; β est d'abord moins brillant et moins blanc que la tache polaire; mais, en s'approchant ensuite du limbe, il déborde et devient aussi blanc et aussi brillant qu'elle; γ est plus loin du bord et plus difficile à voir; mais il est certain, quoique plus faible.

On voit donc parfaitement ici l'influence du rapprochement du bord sur la visibilité et sur l'aspect de ces points.

B. — Hellas.

La région de Mars où est située la grande surface ordinairement blanchâtre et brillante, à laquelle M. Schiaparelli a donné le nom de Hellas, a été observée dix fois à Louvain en 1888; cinq fois Hellas s'est montrée d'une façon caractéristique; voici le détail de ces observations :

27 mars, de 10^h27^m à 10^h40^m, fig. 37. Une grande région blanche s'étend au-dessus de la grande Syrte.

26 avril, de 8^h50^m à 9^h1^m, fig. 43. Hellas est au bord occidental, blanche, brillante, bien arrondie et bien définie, bien tranchée (voyez en *h*).

29 avril, de 8^h24^m à 9^h9^m, fig. 41. Je ne vois pas de région déterminée qui représente Hellas; au-dessus de la grande Syrte règne une blancheur située plus haut que Hellas et dans laquelle on voit la très petite tache blanche et brillante *a* dont il a été déjà question à propos de la tache polaire.

29 avril, de 10^h19^m à 11^h24^m, fig. 42. Hellas, *h*, est devenue bien visible en s'approchant du bord; elle est d'un blanc mat, non brillant, très bien limitée.

29 avril, de 11^h34^m à 12^h19^m, fig. 44. Hellas est devenue blanche et brillante, bien définie, au bord du disque.

Hellas devient donc plus visible, plus blanche et plus brillante en s'approchant du bord.

5 mai, de 11^h8^m à 12^h24^m, fig. 40. Je ne vois plus Hellas qui devrait occuper le méridien central à peu près.

10 mai, de 10^h31^m à 11^h1^m, fig. 33. Hellas, *m*, au bord oriental, est visible comme une région définie, blanche et brillante.

2 juin, de 8^h14^m à 9^h19^m, fig. 45. Hellas est douteuse au bord occidental.

9 juin, de 9^h à 9^h30^m. Je vois une blancheur au-dessus de la grande Syrte.

11 et 12 juin, fig. 39 et 36. Je ne vois plus Hellas.

C. — Argyre et Noachis.

J'ai dessiné Argyre au moins cinq fois en 1888 : les 24, 25, 27, 31 mai, et 6 juillet, fig. 9, 8, 6, 2, 4. Je l'ai toujours notée comme très blanche, très brillante, neigeuse, à bord bien défini, comparable à une tache polaire. *Le 25 mai*, elle est apparue surtout *à* 8^h18^m; *le 27*, elle est notée, *à* 8^h28^m, comme plus petite que la tache polaire, mais comme aussi blanche et aussi brillante. Son déplacement par la rotation est visible si l'on compare ces dessins. Argyre doit aussi avoir sa part dans les blancheurs observées *le 19 avril, fig. 3*, en *e*, et *le 26 avril, fig. 43*, en *b;* mais ici elle ne nous semble pas bien distincte de Noachis.

La présence de Noachis nous paraît donc s'être manifestée spécialement trois fois, au bord supérieur du disque, par un éclat blanc marqué et dans une région également limitée, à savoir : les *19 avril, 26 avril* et *2 juin, fig. 3*, en *e; fig. 43*, en *b; fig. 45*, en *c*. Le savant auteur de la carte de Milan peut seul décider ce point avec l'autorité nécessaire.

D. — Thyle.

Thyle II notamment est apparue au bord sud comme une blancheur bien marquée les *1, 3, 5 avril, fig. 29*, en *b; fig. 25*, en *a; fig. 24*, en *α*; le *1er avril*, elle est notée comme brillante.

Le 3 avril, de 10^h8^m *à* 10^h53^m, elle n'était pas si blanche que le 1er; mais, à 11^h13^m, elle devint plus marquée et neigeuse.

Le 5 avril, elle n'est pas notée comme brillante.

Mentionnons encore ici les petites taches blanches brillantes analogues tout à fait à des taches polaires vues les *29 avril, fig. 41*, en *a*, et *20 mai, fig. 13*, en *α*. J'ai dit déjà que celle du *29 avril* fait songer à Novissima Thyle, région qui pourtant devait être hors de vue en ce moment; et celle

du *20 mai* à une petite région pointillée dans le voisinage de Thyle I sur la carte de M. Schiaparelli [1], à moins que ce ne soit Thyle I elle-même.

Thyle I rend compte des blancheurs représentées au sud dans les *fig. 12 à 16;* dans les *fig. 13, 14 et 16* Thaumasia nous semble y avoir sa part. Thyle I et Thyle II figurent évidemment ensemble dans les *dessins 17 à 23*, et Thyle II plus spécialement *fig. 24 à 36*.

E. — Elysium.

Elysium s'est présenté généralement sous une forme arrondie [2], montrant quelquefois un éclat plus vif que les régions avoisinantes et une teinte blanche assez prononcée. Voici d'ailleurs les détails des observations :

1er avril, de 10h27m à 11h27m, fig. 29. Elysium brille comme un satellite de Jupiter que l'on voit en passage devant le bord de la planète; il n'est pas blanc neigeux; il est moins brillant que les régions blanches figurées au bord du disque et que la tache polaire.

3 avril, de 10h8m à 12h18m, fig. 25. Elysium est à peine plus blanc que le reste.

5 avril, de 11h46m à 12h6m, fig. 24. On dessine Elysium sans mention de son éclat.

9 mai, de 8h26m à 8h41m, fig. 28. Sans mention d'éclat.

9 mai, de 9h10m à 9h29m, fig. 30. Elysium n'est pas blanc, il est peu brillant et difficile à voir.

9 mai, de 10h40m à 11h22m, fig. 34. Sans mention d'éclat.

10 mai, de 8h31m à 9h41m, fig. 26. Elysium n'est ni brillant, ni blanc; il est difficile.

1 Troisième mémoire dans les *Mém. de l'Acad. roy. des Lincei*, sér. IV, vol. 3, pl. I et § 526.

2 Notre huit-pouces nous a permis de saisir des indices de la *forme polygonale* d'Elysium quand cette région se trouvait assez près du limbe : ainsi dans les figures 22, 23, 36 et 39 on distingue très bien les angles que forment entre eux le Styx, le Cerberus et l'Eunostos.

10 mai, de 10^h^31^m^ à 11^h^41^m^, fig. 33. Pas de mention concernant l'éclat.

Il en est de même *les 11 et 12 mai, fig. 27, 32 et 23.*

11 juin, de 8^h^8^m^ à 8^h^33^m^, fig. 39. Elysium noté avec Isidis regio et Æolis comme régions brillantes.

12 et 14 juin, fig. 36 et 31. Rien qui concerne l'éclat.

En considérant que, dans les cas nombreux où Elysium n'a été l'objet d'aucune mention, il ne devait pas avoir de blancheur ni d'éclat exceptionnels, nous trouvons que, pendant cette apparition de Mars et à Louvain du moins, cette région n'a pas semblé aussi blanche ni aussi brillante que de coutume; nous ne trouvons en effet que deux mentions d'un grand éclat (*1er avril et 11 juin*), et une mention d'un éclat blanc neigeux à peine plus grand que celui des régions voisines le 3 avril. Dans d'autres circonstances il est expressément spécifié qu'Elysium n'était ni blanc ni brillant. C'est, en tous cas, au commencement d'avril que l'éclat blanc semble avoir été le plus prononcé.

Ces remarques s'appliquent aux observations précédentes, dans lesquelles Elysium a été vu en plein disque, ou même dans le voisinage du méridien central. Les régions de cette nature paraissent beaucoup plus blanches et plus brillantes lorsqu'elles arrivent au bord du disque; c'est ainsi que le *29 avril, de 8^h^9^m^ à 8^h^24^m^*, nous voyons figurer au bord occidental de la planète une tache blanche brillante, comparable à une tache polaire, et qui doit être produite par la présence d'Elysium, v. *fig. 41, h;* il en est de même du *5 mai, de 11^h^8^m^ à 11^h^20^m^, fig. 40*, en *m*. Nous n'avons pas d'exemple de pareil phénomène quand Elysium se trouvait voisin du bord oriental, notamment dans les figures 16, 17, 18, 19.

F. — Tempe, forme polygonale.

La région Tempe a été souvent observée à Louvain en 1888; son éclat, son aspect blanc neigeux ont été fréquemment enregistrés, spécialement au bord oriental. On a vu avec grande netteté la forme polygonale de cette

région, dont le périmètre est constitué par Mare Acidalium, Nilokeras, Nilus, Ceraunius et Tanaïs. Voici le détail des observations.

14 avril, de 10^h52^m à 11^h42^m, fig. 14. Tempe s'approche du bord occidental; les notes ne renferment pas de mention spéciale à son sujet.

16 avril, de 10^h34^m à 11^h39^m, fig. 11. Tempe bien limité, plus brillant que le reste, à part, bien entendu, la tache polaire.

19 avril, de 8^h14^m à 8^h37^m, fig. 3. Pas de mention spéciale.

21 avril, de 10^h20^m à 11^h44^m, fig. 5. Tempe bien limité et brillant.

22 avril, de 11^h32^m à 11^h42^m, fig. 7. Tempe bien limité, sans mention spéciale.

26 avril, de 10^h20^m à 11^h47^m, fig. 47. A 11^h34^m, Tempe est blanc et brillant au bord oriental.

29 avril, de 11^h34^m à 12^h19^m, fig. 44. Tempe blanc et brillant au bord oriental.

20 mai, de 8^h20^m à 9^h30^m, fig. 13. Tempe approche du bord occidental; sans mention spéciale.

20 mai, de 10^h45^m à 11^h15^m, fig. 18. Tempe est au bord occidental; sans mention spéciale.

23 mai, de 7^h58^m à 9^h22^m, fig. 10. La forme polygonale de Tempe est évidente; pas d'autre mention relativement à l'éclat.

24 mai, de 8^h13^m à 9^h8^m. fig. 9. La forme polygonale se voit très bien; mais on ne fait pas d'autre mention.

25 mai, de 7^h50^m à 8^h25^m, fig. 8. Même remarque. La forme polygonale se voit encore partiellement.

27 mai, de 7^h57^m à 9^h13^m, fig. 6. Aucune mention spéciale.

31 mai, de 7^h46^m à 9^h33^m, fig. 2. Tempe brille d'un blanc neigeux au bord oriental.

1er juin, de 7^h54^m à 8^h58^m, fig. 46. Tempe brille et paraît blanchâtre au bord oriental.

2 juin, de 8^h14^m à 9^h19^m, fig. 45. Tempe est blanc et brillant au bord oriental, mais moins cependant que la tache polaire.

24 juin, de 8^h3^m à 8^h48^m, fig. 17. Tempe brille comme un point blanc à l'extrême bord occidental, *a*.

27 juin, de 8^h16^m à 8^h26^m, fig. 15. Pas de mention spéciale sur Tempe, qui s'approche du bord occidental.

29 juin, de 8^h45^m à 9^h, fig. 12. Pas de mention spéciale.

6 juillet, de 8^h15^m à 8^h45^m, fig. 4. Tempe est blanc au bord oriental.

9 juillet, de 8^h41^m à 8^h50^m, fig. 1. On ne voit pas Tempe au bord oriental.

Nous pouvons nous résumer en disant que l'éclat blanc neigeux de Tempe a été constaté le plus fréquemment au bord du disque, et plus fréquemment au bord oriental qu'au bord occidental, au contraire d'Elysium.

Mais nous nous hâterons d'ajouter que les conditions particulièrement mauvaises de cette opposition, et dans lesquelles beaucoup de dessins ont été faits, ne permettent pas de conclusion décisive à l'égard de cette différence d'aspect aux deux bords de la planète.

G. — Thaumasia et régions diverses.

Une autre région nous semble être apparue au bord supérieur du disque avec un éclat blanc, c'est Thaumasia; mais ici surtout M. Schiaparelli seul pourra décider en dernier ressort. Nous avons cru, en effet, la voir figurer fort probablement aux dates suivantes : *14 avril, fig. 14; 16 avril, fig. 11; 18 mai, fig. 16* et le *20 mai, fig. 13.* A cette dernière date, nous voyons

aussi une sorte de tache polaire très petite, au sud, et dont il a été question plus haut.

Les observateurs de Mars savent depuis longtemps que les bords du disque paraissent souvent fort blancs et brillants; la belle carte de M. Schiaparelli nous apprend que cette apparence est due à la présence, sur le limbe, de certaines régions spéciales, parmi lesquelles il faut citer d'abord celles dont il vient d'être question. D'autres régions encore produisent le même effet et nos dessins de 1888 en présentent de nombreux exemples. Nous avons dressé le tableau suivant contenant les districts de la carte qui correspondent à toutes les taches blanches brillantes observées sur les bords :

1er avril, à 10h27m, fig. 29, en *c,* Libya et Amenthes.

3 avril, de 11h1m à 11h13m, fig. 25, en *b,* Libya et Amenthes.

19 avril, de 8h14m à 8h27m, fig. 3, en *f,* Aëria ou Meroe? en *g,* Tharsis.

26 avril, de 8h50m à 9h1m, fig. 43, en *c,* Thymiamata et Chryse, en *d,* Isidis regio.

29 avril, de 10h19m à 10h29m, fig. 42, en *k,* Isidis regio.

29 avril, de 11h34m à 11h42m, fig. 44, en *c,* Isidis regio.

5 mai, de 11h8m à 11h20m, fig. 40, en *k,* Amenthes et Æthiopis.

9 mai, de 9h10m à 9h29m, fig. 30, en *a,* Libya et Amenthes.

9 mai, de 10h40m à 11h2m, fig. 34, en *c,* Isidis regio et Libya.

10 mai, de 10h31m à 11h1m, fig. 33, en *h,* Libya.

11 mai, de 9h31m à 9h44m, fig. 27, en *h,* Libya.

11 mai, de 11h6m à 11h24m, fig. 32, en *h,* Libya.

12 mai, de 9h12m à 9h18m, fig. 23, en *h,* Amenthes et Æthiopis.

31 mai, de 9h16m à 9h30m, fig. 2, en *g,* Aëria.

2 juin, de 8h14m à 8h39m, fig. 45, en *f,* Isidis et Neith regio.

11 juin, de 8h8m à 8h33m, fig. 39, en *a,* au bord occidental, Æolis; en *a*, près de la grande Syrte, Isidis regio.

24 juin, de 8h3m à 8h35m, fig. 17, en *b*, Tharsis et Chryse.

29 avril, de 8h9m à 8h24m, fig. 41, le sommet d'Isidis regio, le long du Nepenthes, est excessivement blanc en *k;* de même que la côte d'Aëria, en *m.*

2 juin, de 8h14m à 8h39m, fig. 45, Edom promontorium est blanc brillant, en *c.*

VII. — Observations des canaux.

A. — Liste des canaux observés a Louvain en 1888.

En compulsant les observations précédentes, nous trouvons qu'en 1888 nous avons vérifié, à Louvain, l'existence des canaux proprement dits suivants; quelques canaux restés douteux sont marqués d'un point d'interrogation :

Astusapes, Phison, Typhonius, Orontes, Protonilus, Deuteronilus, Callirrhoe, Euphrates (en dessous du Lacus Ismenius), Hiddekel et Gehon (traces), Indus, Oxus, Tanaïs, Jaxartes, Ganges, Nilokeras, Nilus, Ceraunius, Agathodœmon, Nectar, Gigas? Phlegethon? Acheron? Pyriphlegethon? Hades, Erebus, Cerberus, Styx, Eunostos, Hyblaeus, Antaeus, Cyclops? Triton, Lethes (de la petite Syrte au Triton), Nepenthes, Thoth.

B. — Aspect des canaux. Difficulté; coloration; largeur.

Les canaux étaient des objets *excessivement difficiles à voir* si l'on en excepte le Tanaïs, le Jaxartes, le Deuteronilus, le Protonilus, le Thoth, le Triton, Callirrhoe, Nilokeras, Nilus, Ceraunius, Agathodœmon, Nectar, Hades, Erebus, Cerberus, Styx, Eunostos, Hyblaeus, Nepenthes.

Les canaux autres que ceux que nous venons de nommer ne pouvaient

être aperçus qu'après une recherche *obstinée* au point précis où l'observateur savait devoir les trouver; les canaux *les plus faciles à voir*, parmi tous, étaient : le Thoth, le Protonilus, le Deuteronilus, le Callirrhoe, le Tanaïs, le Jaxartes, le Nilus, le Cerberus, le Styx, l'Eunostos, le Nepenthes, le Triton.

Un certain nombre de canaux ont paru *gris*, le plus souvent du moins; citons : Jaxartes, Callirrhoe, Typhonius, Orontes, Indus, Oxus, Ganges, Triton, Lethes, Thoth, Euphrates, Nilokeras, Ceraunius, Hades, Erebus, Styx, Hyblaeus, Antaeus; d'autres *noirs*, tels que : Astusapes, Tanaïs, Agathodœmon, Nectar, Nepenthes.

Plusieurs eurent souvent une teinte *rosée* très marquée, rappelant la teinte que présentent certaines bandes de Saturne vues avec un fort grossissement; citons : Phison, Protonilus, Deuteronilus, Nilus, Cerberus, Eunostos, Styx, Hyblaeus, Gigas? Phlegethon?

Certains canaux paraissaient fort déliés, fort minces : Astusapes, Typhonius, Orontes, Indus, Oxus, Tanaïs, Ganges, Agathodœmon, Nectar; d'autres plus larges, tels que : Deuteronilus, Protonilus, Callirrhoe, Ceraunius, Hades, Erebus, Cerberus, Styx, Eunostos, Nepenthes, Triton, Thoth; d'autres très larges, apparaissant sous forme de rubans, et cet aspect était probablement un indice de leur gémination; citons : Phison, Nilokeras, Nilus, Gigas? Phlegethon?

C. — Gémination du Phison.

J'ai observé trois fois le Phison : *le 29 avril, fig. 42; le 1er juin, fig. 46* et *le 2 juin, fig. 45*.

La première fois, ce canal apparaissait comme un large ruban rosé, très pâle, parfaitement rectiligne (voir *fig. 42, b*); cette observation, quoique difficile, ne laissait pas le moindre doute.

La deuxième et la troisième fois (voir *fig. 46 et 45*), le ruban paraissait dédoublé en deux traits plus fins, parfaitement rectilignes et parallèles; la difficulté de l'observation donnait prise à un léger doute, *mais telle était néanmoins l'impression reçue*.

Comme preuve de l'impartialité qui a présidé à toutes ces observations, je rappellerai ici que M. Schiaparelli, par une lettre du 28 mai, m'avertissait de l'existence d'une gémination très marquée dans son dix-huit-pouces, celle de l'Euphrate, en m'engageant à la vérifier. J'ai fait tous mes efforts, à partir de cette date, pour réussir à voir la gémination de l'Euphrate, mais ce canal lui-même m'a échappé totalement, à l'exception du tronçon que j'en ai vu sous le lacus Ismenius le *31 mai* (voir *fig. 2, c*), et encore n'ai-je identifié ce dernier qu'en étudiant mes dessins longtemps après et en commençant la rédaction de ce mémoire.

VIII. — Conclusions.

Les résultats consignés dans ce mémoire sont minimes si on les compare à ceux que M. Perrotin a obtenus à l'Observatoire de Nice, à l'aide de la gigantesque lunette de $0^{m}76$, le deuxième instrument du monde, et à ceux que M. Schiaparelli a réalisés lui-même à Milan avec son admirable dix-huit pouces, spécialement en ce qui concerne la gémination des canaux. Je l'ai dit en commençant, dans des conditions aussi défavorables, l'on ne pouvait que s'attendre à moins encore en se servant d'un simple huit-pouces, quelque excellent qu'il fût. Mais ces résultats ont une valeur incontestable en présence de l'incrédulité avec laquelle certains astronomes considèrent encore les belles découvertes de Milan. Qui l'eût cru? Malgré les beaux dessins de M. Perrotin, on écrit encore que les découvertes de M. Schiaparelli n'ont pas été confirmées par les plus grands instruments [1]!

Nous sommes donc heureux d'apporter notre appoint à la défense de la vérité. Notre excellent équatorial, comparable à celui avec lequel M. Schiaparelli a fait ses premières découvertes, nous a permis de vérifier l'existence d'un assez grand nombre de canaux, d'entrevoir la gémination de l'un d'eux, malgré le concours de circonstances déplorables qui annihilaient une grande partie de sa puissance; il nous a surtout mis à même d'admirer l'exactitude

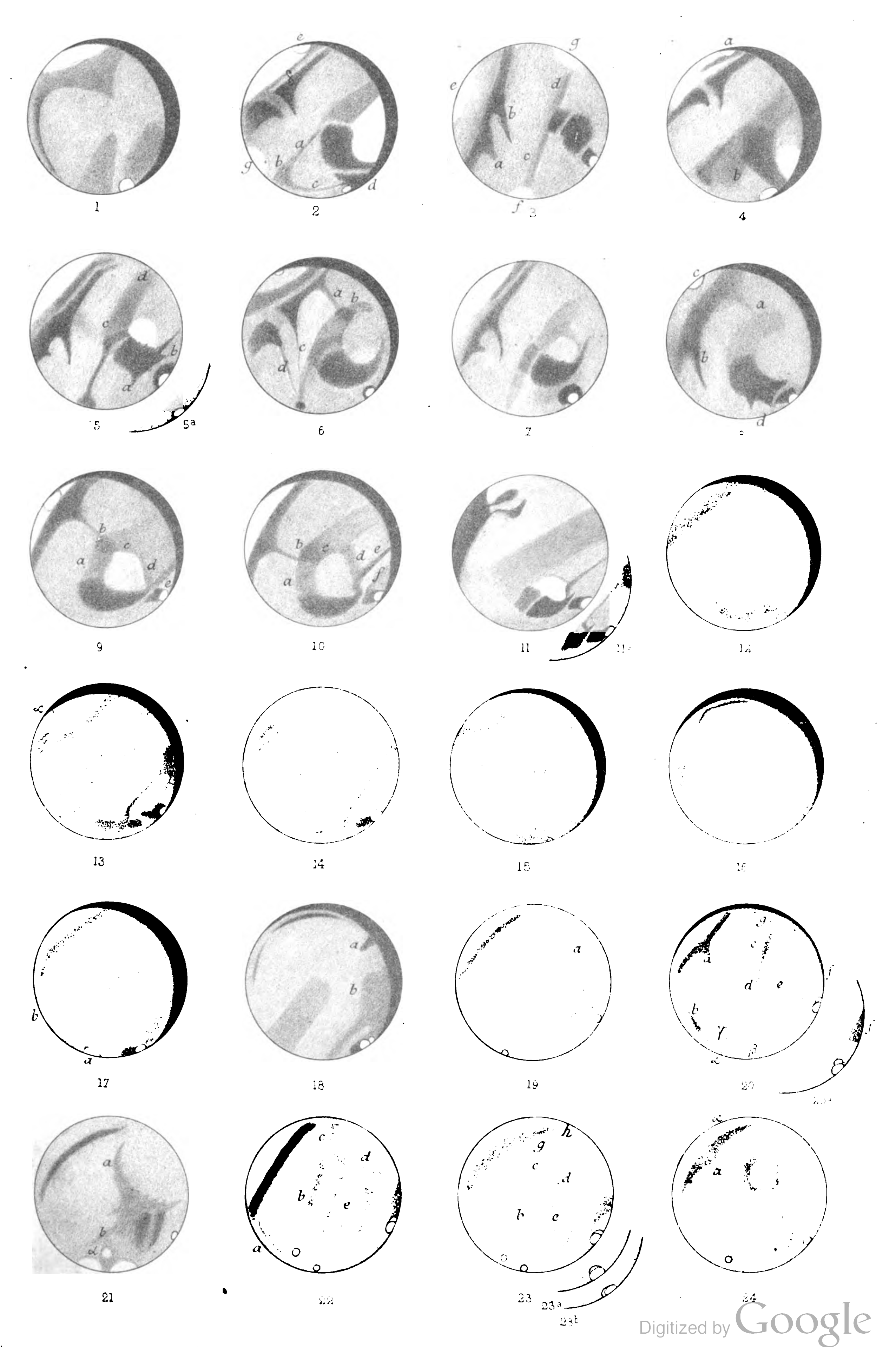
[1] *English mechanic*, janvier 1889, p. 368.

générale de la carte, de constater, par exemple, *que pas une seule des taches blanches et brillantes que nous avions remarquées sur les bords de la planète, comme tous les observateurs l'ont fait depuis bien longtemps, ne restait inexpliquée à qui se munissait de ce guide presque infaillible.*

D'après ce que nous avons vu, nous osons l'affirmer, désormais les progrès de l'aréographie sont aux mains de ceux-là seuls qui, s'affranchissant des entraves du doute, s'engageront résolûment dans la voie tracée par le célèbre astronome de Milan : une nouvelle ère s'est ouverte dans l'étude de Mars par *la découverte des canaux, de leur gémination et par la détermination micrométrique des cent et quatorze points fondamentaux de la carte,* ère succédant à celle qui fut inaugurée il y a un demi-siècle par *la construction des deux premiers hémisphères de Mars et par la fixation approximative des quatorze points de* MÄDLER.

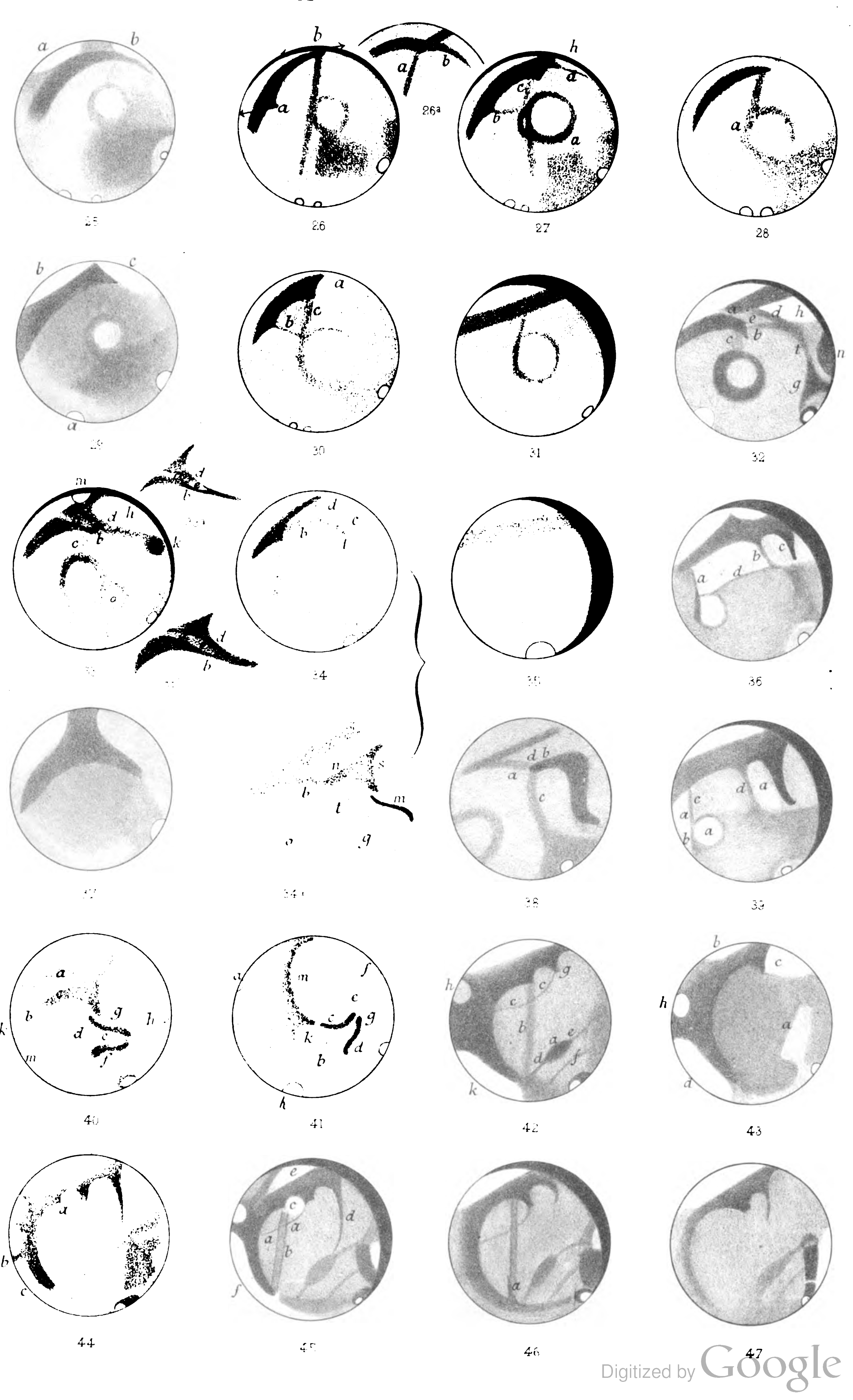
TABLE.

Opposition de Mars en 1888.



F. Terby ad. nat. del.

Opposition de Mars en 1888.



F. Terby ad nat. del.

SUR

LA GÉNÉRALISATION DES SEMI-INVARIANTS;

PAR

JACQUES DERUYTS,
CHARGÉ DE COURS A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 6 avril 1889.)

SUR

LA GÉNÉRALISATION DES SEMI-INVARIANTS.

I. Soit

$$\psi = \psi(a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}, b_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}, \ldots),$$

une fonction entière, homogène et isobarique * des coefficients $a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$, $b_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}$, etc., de formes algébriques à n variables

$$f = \Sigma \mathrm{P}_\alpha a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

$$\varphi = \Sigma \mathrm{P}_\beta b_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n}, \text{etc.}$$

Si l'on effectue la transformation linéaire

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = & \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \alpha_{13}X_3 + \cdots + \alpha_{1n}X_n \\ x_2 = & \alpha_{22}X_2 + \alpha_{23}X_3 + \cdots + \alpha_{2n}X_n \\ x_3 = & \alpha_{33}X_3 + \cdots + \alpha_{3n}X_n \\ \vdots & \cdots\cdots \\ & \cdots\cdots \\ x_n = & \alpha_{nn}X_n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{T})$$

* Désignons par K un produit de facteurs $a, b, \ldots\ x, y, \ldots$; $x_1x_2\ldots x_n$, $y_1y_2\ldots y_n\ldots$ formant des séries de variables cogrédientes. *Le poids* de K *par rapport à un indice i* est la somme algébrique des poids des différents facteurs : pour l'indice i, x_j, $y_j\ldots$ ($i \gtrless j$) ont le poids zéro; x_i, $y_i\ldots$ ont le poids (-1); $a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$, $b_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}\ldots$ ont le poids α_i, β_i, ...

Une fonction est *isobarique,* quand elle s'exprime par une somme de termes K qui ont le même poids pour les indices 1, 2, 3, ... n (le poids n'est pas nécessairement le même pour tous les indices). Nous avons fait usage de ces définitions dans notre travail *Sur la théorie des formes algébriques à un nombre quelconque de variables* (BULL. DE L'ACADÉMIE, juin 1888).

les formes f, φ... prennent les nouvelles expressions

$$f = \Sigma P_\alpha A_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{\alpha_n},$$

$$\varphi = \Sigma P_\beta B_{\beta_1\beta_2 \dots \beta_n} X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \dots X_n^{\beta_n}, \text{ etc.}$$

Nous considérons les fonctions ψ pour lesquelles on a

$$\psi(A_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n}, B_{\beta_1\beta_2 \dots \beta_n} \dots) = \alpha_{11}^{m_1} \alpha_{22}^{m_2} \dots \alpha_{nn}^{m_n} \psi(a_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n}, b_{\beta_1 \dots \beta_n} \dots); \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

pour abréger, nous les désignerons sous le nom de *semi-invariants de première espèce*. Ces fonctions comprennent, comme cas particulier, les quantités que nous avons étudiées sous le nom de « semi-invariants directs ».

Par un changement de notation, on est conduit à des « semi-invariants de seconde espèce » analogues aux semi-invariants de première espèce, pour les transformations linéaires de module

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

La généralisation actuelle s'étend immédiatement aux fonctions semi-invariantes quelconques.

Dans le présent travail, nous nous occupons seulement des semi-invavariants de première espèce et de certains semi-covariants de seconde espèce, particulièrement simples. Les résultats de notre étude servent de préliminaires à d'autres recherches *sur les transformations linéaires et la théorie des covariants*.

D'ailleurs, nous espérons reprendre prochainement l'étude des fonctions semi-invariantes, dans le cas le plus général.

II. D'après l'équation (1), on a

$$\psi(A_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n}, B_{\beta_1 \dots \beta_n} \dots) = \psi,$$



quand la transformation linéaire se réduit à

$$\left.\begin{array}{c} x_i = X_i + \lambda X_j,\ (j > i), \\ x_1 = X_1,\ x_2 = X_2,\ \dots x_{i-1} = X_{i-1},\ x_{i+1} = X_{i+1},\ \dots\ x_n = X_n. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (T_1)$$

En remplaçant $A_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, $B_{\beta_1 \dots \beta_n} \dots$ par leurs valeurs, en fonction des coefficients $a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$, $b_{\beta_1 \dots \beta_n} \dots$, on trouve :

$$\psi(A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n},\ B_{\beta_1 \dots \beta_n} \dots) = \psi + \frac{\lambda}{1}(ji)\,\psi + \frac{\lambda^2}{1\,.\,2}\,.\,(ji)^2\psi + \cdots \ ^{*}.$$

Il résulte de là que l'équation $(ji)\psi = 0$ est suffisante et nécessaire pour établir la formule (1), quand la transformation linéaire (T) se réduit à (T_1).

Les équations $(ji)\psi = 0$, où l'on a $j > i$, se réduisent à $n - 1$ d'entre elles :

$$(21)\,\psi = 0,\ (32)\,\psi = 0,\ \dots\ (n\,n-1)\,\psi = 0,$$

par l'emploi de l'identité

$$(hl)\,(ll') - (ll')\,(hl) = -\,(hl') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

D'autre part, toute substitution (T) se ramène à une combinaison des transformations (T_1) et de la transformation

$$x_1 = \mu_1 X_1,\ x_2 = \mu_2 X_2,\ \dots\ x_n = \mu_n X_n.$$

Par conséquent : *une fonction entière et homogène des coefficients de formes* f, φ... *est un semi-invariant de première espèce, si elle est isobarique et si elle satisfait aux équations* $(i + 1, i) = 0$ *pour* $i = 1, 2, 3, \dots n - 1$.

III. *Tout semi-invariant de première espèce* ψ, *qui a le même poids* $m_1 = m_2 = \cdots = m_n$ *pour les indices* 1, 2, 3, ... n *est un invariant* **.

* En général, la quantité (hl)K est définie par $(hl)\,K = \Sigma \alpha_h a_{\alpha_1 \dots \alpha_h - 1, \dots \alpha_l + 1, \dots \alpha_n} \frac{dK}{da_{\alpha_1 \dots \alpha_n}}$: la sommation doit s'étendre à toutes les formes dont dépend la fonction K.

L'opération (hl) augmente d'une unité le poids pour l'indice l : elle diminue d'autant le poids pour l'unité h (voir notre travail déjà cité).

** Il est visible que dans la formule (1), la fonction ψ a pour poids m_1, m_2, ... m_n.

Les invariants sont caractérisés par les propriétés suivantes : 1° ils sont fonctions entières, homogènes et isobariques des coefficients $a_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, $b_{\beta_1 \dots \beta_n} \dots$; de plus, ils ont même poids pour les indices 1, 2, 3, ... n; 2° ils satisfont aux équations

$$(ji) = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3 \dots n : i \gtrless j).$$

Pour démontrer la proposition énoncée, il suffira de vérifier les formules

$$(ji)\,\psi = 0, \quad (j < i),$$

ou, plus simplement,

$$(i, i+1)\,\psi = 0 : i = 1, 2, 3, \dots n-1,$$

ainsi qu'il résulte de l'identité (2).

Observons que d'après la relation $(i+1, i)\psi = 0$, la fonction ψ est un semi-invariant, pour un système de formes binaires aux variables x_i, x_{i+1}; le système dont il s'agit est composé des formes

$$f_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{i-1}\alpha_{i+2} \dots \alpha_n} = \Sigma \frac{\overline{\alpha_i + \alpha_{i+1}}!}{\alpha_i!\,\alpha_{i+1}!} a_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n} x_i^{\alpha_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}},$$

$$\varphi_{\beta_1 \dots \beta_{i-1}\beta_{i+2} \dots \beta_n} = \Sigma \frac{\overline{\beta_i + \beta_{i+1}}!}{\beta_i!\,\beta_{i+1}!} b_{\beta_1 \dots \beta_n} x_i^{\beta_i} x_{i+1}^{\beta_{i+1}}, \text{ etc.}$$

(les indices $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{i-1}$, $\alpha_{i+2} \dots \alpha_n$ et $\beta_1\beta_2 \dots \beta_{i-1}$, $\beta_{i+2} \dots \beta_n$ sont constants et les sommations se rapportent aux diverses valeurs de α_i, α_{i+1}, β_i, β_{i+1}).

Or, un semi-invariant de formes binaires, en x_i, x_{i+1}, est un invariant quand il a le même poids pour les indices i, $i+1$; il satisfait alors aux équations $(i+1, i) = 0$, $(i, i+1) = 0$. D'après les conditions de l'énoncé, la fonction ψ a le même poids pour les indices i, $i+1$; on a donc $(i, i+1)\psi = 0$. C'est le résultat que nous voulions obtenir.

La considération des semi-invariants binaires, en x_i, x_{i+1}, permet encore d'établir cette autre propriété : *Dans un semi-invariant de première espèce, le poids* m_i, *pour l'indice* i *est égal ou supérieur au poids* m_{i+1} *pour l'indice* $i+1$.

IV. Soient $r+1$, $\rho+1$ ... les degrés du semi-invariant ψ par rapport aux formes f, φ, ... On obtient l'expression symbolique de ψ au moyen des transformations suivantes :

1° On remplace f, φ ... par

$$f + \lambda' f' + \lambda'' f'' + \cdots + \lambda^{r)} f^{r)},$$

$$\varphi + \mu'\varphi' + \mu''\varphi'' + \cdots + \mu^{\rho)}\varphi^{\rho)}, \text{ etc.},$$

$(f', f'', \dots f^{r)})$, $(\varphi', \varphi'', \dots \varphi^{\rho)})$ ... étant des formes des mêmes ordres que f, φ...; on divise ensuite par $\overline{r+1}\,!\ \overline{\rho+1}\,!$... le coefficient de $\lambda'\lambda'' \dots \lambda^{r)}.\ \mu' \dots \mu^{\rho)}$... dans l'expression de la fonction ψ modifiée; on obtient ainsi un semi-invariant de première espèce ψ', qui est linéaire par rapport à $f f' f'' \dots \varphi \varphi' \varphi''$..., etc.; de plus, ψ' se réduit à ψ si l'on prend $f' = f'' = \cdots = f^{r)} = f$...; $\varphi' = \varphi'' = \cdots = \varphi^{\rho} = \varphi$, etc.

2° On remplace les formes $f f' f'' \dots \varphi \varphi' \varphi''$..., etc., par des puissances de formes linéaires, les indices des puissances étant égaux aux degrés des formes correspondantes. La fonction ψ' modifiée par cette substitution est l'espression symbolique ψ'' du semi-invariant de première espèce ψ. La fonction ψ'' est évidemment un semi-invariant de première espèce, pour les formes linéaires qui ont été introduites. Appliquons à ces formes linéaires une transformation analogue à celle qui a été employée ci-dessus pour les formes f, φ, ...; nous déduirons de ψ'' un semi-invariant de première espèce ψ''', du premier degré pour un système plus étendu de formes linéaires. D'ailleurs, en supposant égales certaines formes linéaires dans la fonction ψ''', on retrouvera l'expression symbolique ψ'' de ψ. Par suite, *la recherche de l'expression symbolique ψ'' des semi-invariants de première espèce se ramène à la recherche de l'expression effective des semi-invariants de première espèce ψ''', contenant au premier degré les coefficients de formes linéaires.*

La méthode que nous venons de suivre est semblable à celle qui a été employée par Clebsch, dans son mémoire *Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen* *.

* *Journal de Crelle*, tome LIX.

Notations. — Nous supposerons que ψ''' se rapporte au système de formes linéaires

$$\left.\begin{array}{l} a_x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ b_x = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ k_x = k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\sigma)$$

Nous représenterons en général par la lettre s les coefficients des formes contenues dans le tableau précédent; de même, nous représenterons par S les coefficients du système (σ) transformé par la substitution (T) [§ I], savoir :

$$\left.\begin{array}{l} A_i = \alpha_{1i}a_1 + \alpha_{2i}a_2 + \cdots + \alpha_{ii}a_i \\ B_i = \alpha_{1i}b_1 + \alpha_{2i}b_2 + \cdots + \alpha_{ii}b_i \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ K_i = \alpha_{1i}k_1 + \alpha_{2i}k_2 + \cdots + \alpha_{ii}k_i, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (S)$$

$$i = 1, 2, 3 \ldots n.$$

Dans tout ce qui suit, nous ferons usage de la notation $L[s, s', s'', \ldots]$, pour indiquer une fonction linéaire par rapport aux coefficients (s) et par rapport à d'autres suites de quantités

$$s'_1,\ s'_2,\ s'_3\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (s')$$

$$s''_1,\ s''_2,\ s''_3\ \ldots,\ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (s'')$$

V. D'après les conventions précédentes, nous écrirons $\psi''' = L[s]$ et nous aurons, par la définition des semi-invariants de première espèce:

$$L[S] = \alpha_{11}^{m_1} \alpha_{22}^{m_2} \ldots \alpha_{nn}^{m_n} L[s] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Désignons par α_{pij} des quantités arbitraires et appliquons aux deux



membres de l'équation (3), les $n \times m_n$ opérations

$$
\begin{array}{l}
\alpha_{p11}\dfrac{d}{d\alpha_{11}}, \\
\alpha_{p12}\dfrac{d}{d\alpha_{12}} + \alpha_{p22}\dfrac{d}{d\alpha_{22}}, \\
\alpha_{p13}\dfrac{d}{d\alpha_{13}} + \alpha_{p23}\dfrac{d}{d\alpha_{23}} + \alpha_{p33}\dfrac{d}{d\alpha_{33}}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\alpha_{p1n}\dfrac{d}{d\alpha_{1n}} + \alpha_{p2n}\dfrac{d}{d\alpha_{2n}} + \alpha_{p3n}\dfrac{d}{d\alpha_{3n}} + \cdots + \alpha_{pnn}\dfrac{d}{d\alpha_{nn}},
\end{array}
$$

$$p = 1, 2, 3, \ldots, m_n.$$

Le second membre de l'équation (3) sera remplacé par :

$$\varepsilon L[s]\, \alpha_{11}^{m_1 - m_n}\, \alpha_{22}^{m_2 - m_n} \ldots \alpha_{n-1,n-1}^{m_{n-1} - m_n}\, \Pi\, \alpha_{p11}\alpha_{p22}\ldots\alpha_{pnn};$$

dans cette expression, ε représente un facteur numérique et le symbole Π indique le produit des quantités $\alpha_{p11}\alpha_{p22}\ldots\alpha_{pnn}$, pour $p = 1, 2, 3, \ldots m_n$.

D'après le sens de la notation L[S], le premier membre de l'équation (3) modifiée est une fonction linéaire des quantités $A_i\, B_i \ldots K_i$ et des quantités :

$$
\left.
\begin{array}{l}
a_{pi} = \alpha_{p1i}a_1 + \alpha_{p2i}a_2 + \cdots + \alpha_{pii}a_i \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
k_{pi} = \alpha_{p1i}k_1 + \alpha_{p2i}k_2 + \cdots + \alpha_{pii}k_i.
\end{array}
\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (s')
$$

Nous représenterons par s' les quantités comprises dans le tableau précédent ; le premier membre de l'équation (3) modifiée s'écrira alors : $\varepsilon L[S, s']$. De cette manière, on déduit de la formule (3)

$$L[S, s'] = L[s]\, \alpha_{11}^{m_1 - m_n}\, \alpha_{22}^{m_2 - m_n} \ldots \alpha_{n-1\,n-1}^{m_{n-1} - m_n}.\, \Pi\, \alpha_{p11}\alpha_{p22}\ldots\alpha_{pnn} \quad \dots \quad (4)$$

Si l'on suppose $\alpha_{ij} = 0 (i < j)$, $\alpha_{ii} = 1$, on doit remplacer les quantités S par s : la dernière relation donne alors

$$L[ss'] = L[s]\, \Pi\, \alpha_{p11}\alpha_{p22}\ldots\alpha_{pnn}$$

et par combinaison avec l'équation (4), on obtient :

$$L[S, s'] = L[s, s'] \alpha_{11}^{m_1 - m_n} \alpha_{22}^{m_2 - m_n} \alpha_{n-1\,n-1}^{m_{n-1} - m_n} \text{ (*)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

VI. Remplaçons α_{p11}, α_{p12} ... par $\alpha_{p11}\beta_{11}$, $\alpha_{p11}\beta_{12} + \alpha_{p12}\beta_{22}$, ... et en général l'élément α_{pij} par $\alpha_{pii}\beta_{ij} + \alpha_{p,i,i+1}\beta_{i+1,j} + \ldots + \alpha_{pij}\beta_{jj}$: l'élément α_{pii} sera ainsi remplacé par $\alpha_{pii}\beta_{ii}$. Il faudra substituer aux quantités s', les quantités S′ comprises dans le tableau

$$\left.\begin{array}{l} A_{pi} = \beta_{1i}a_{p1} + \beta_{2i}a_{p2} + \cdots + \beta_{ii}a_{pi} \\ B_{pi} = \beta_{1i}b_{p1} + \beta_{2i}b_{p2} + \cdots + \beta_{ii}b_{pi} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_{pi} = \beta_{1i}k_{p1} + \beta_{2i}k_{p2} + \cdots + \beta_{ii}k_{pi}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (S')$$

L'équation (4) donne par suite :

$$L[S, S'] = \{\beta_{11}\beta_{22}\ldots\beta_{nn}\}^{m_n} L[S, s'].$$

Supposons dans cette dernière formule $\alpha_{ii} = 1$, $\alpha_{ij} = 0 (i < j)$; les quantités S (§ V) se réduisent aux quantités s; il en résulte la relation :

$$L[s, S'] = \{\beta_{11}\beta_{22}\ldots\beta_{nn}\}^{m_n} L[s, s'] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

VII. Observons que les éléments α_{pij} étant arbitraires, on peut regarder les quantités s' comme les coefficients de formes linéaires

$$\left.\begin{array}{l} a_p(y) = a_{p1}y_1 + a_{p2}y_2 + \cdots + a_{pn}y_n, \\ b_p(y) = b_{p1}y_1 + b_{p2}y_2 + \cdots + b_{pn}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_p(y) = k_{p1}y_1 + k_{p2}y_2 + \cdots + k_{pn}y_n, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\sigma')$$

par rapport à de nouvelles variables $y_1 y_2 \ldots y_n$. Effectuons sur les variables y

* Les différences $m_1 - m_n$, $m_2 - m_n$, ... ne peuvent pas être négatives (§ III).

la transformation

$$\begin{array}{l} y_1 = \beta_{11}Y_1 + \beta_{12}Y_2 + \beta_{13}Y_3 + \cdots \beta_{1n}Y_n \\ y_2 = \qquad \beta_{22}Y_2 + \beta_{23}Y_3 + \cdots \beta_{2n}Y_n \\ y_3 = \qquad\qquad \beta_{33}Y_3 + \cdots \beta_{3n}Y_n \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ y_n = \qquad\qquad\qquad\qquad \beta_{nn}Y_n; \end{array}$$

les quantités S′ seront précisément les coefficients de $Y_1Y_2 \ldots Y_n$ dans les formes $a_p(y)$, $b_p(y) \ldots k_p(y)$ transformées.

La fonction $L[s, s']$ est isobarique, mais elle n'est pas nécessairement homogène par rapport aux formes des systèmes (σ) et (σ'); nous pourrons l'écrire :

$$L[ss'] = \Sigma\lambda_1,$$

comme somme de quantités homogènes λ_1, et de telle manière que λ_1 soit un semi-invariant de première espèce pour les systèmes (σ), (σ') considérés comme indépendants.

Il résulte de la formule (6), que le semi-invariant de première espèce λ_1, pour les formes $a_p(y)$, $b_p(y)$, ... $k_p(y)$, est nécessairement un invariant, car il a même poids m_n pour les indices $1, 2, 3 \ldots n$ (§ III); les fonctions λ_1 sont donc des invariants par rapport au système (σ').

D'après la formule (5), les fonctions λ_1 sont des semi-invariants de première espèce, par rapport au système (σ) : le poids pour l'indice n est égal à zéro, si l'on regarde comme des constantes les coefficients du système (σ'). Par suite, les quantités λ_1 sont des semi-invariants de première espèce, pour les formes à $n - 1$ variables

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_{n-1}x_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_{n-1}x_{n-1}. \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots \quad (\sigma')$$

En résumé, $L[s, s']$ *est une somme de fonctions* λ_1 *qui sont des invariants pour le système* (σ') *et des semi-invariants de première espèce pour le sys-*

tème (σ_1) *à* n — 1 *variables.* Il est du reste visible que $L[s, s']$ *se réduit à* $L[s]$, *quand on fait* $a_{pi} = a_i$, $b_{pi} = b_i$, ... $k_{pi} = k_i$.

VIII. Appliquons aux semi-invariants λ_1, le mode de transformation que nous avons employé ci-dessus, dans le cas de n variables. Nous déduirons de $L[s, s']$ une fonction $L[s, s', s'']$ qui contient les coefficients s'' d'un nouveau système (σ'') de formes à n — 1 variables $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$. D'après la méthode suivie, on réduira $L[s, s', s'']$ à $L[s]$ en identifiant certaines séries de coefficients s, s', s''. Représentons encore par S'' les coefficients du système (σ'') transformé par la substitution linéaire

$$\begin{aligned}
z_1 &= \gamma_{11}Z_1 + \gamma_{12}Z_2 + \gamma_{13}Z_3 + \cdots + \gamma_{1,n-1}Z_{n-1} \\
z_2 &= \gamma_{22}Z_2 + \gamma_{23}Z_3 + \cdots + \gamma_{2,n-1}Z_{n-1} \\
z_3 &= \gamma_{33}Z_3 + \cdots + \gamma_{3,n-1}Z_{n-1} \\
&\vdots \qquad \cdots\cdots \\
z_{n-1} &= \gamma_{n-1,n-1}Z_{n-1}.
\end{aligned}$$

Nous trouverons :

$$L[S, S', S''] = L[s, s', s''] \times \alpha_{11}^{m_1 - m_{n-1}} \alpha_{22}^{m_2 - m_{n-1}} \ldots \alpha_{n-2,n-2}^{m_{n-2} - m_{n-1}}$$
$$\times \{\gamma_{11}\gamma_{22} \cdots \gamma_{n-1,n-1}\}^{m_{n-1} - m_n} \times \{\beta_{11}\beta_{22} \cdots \beta_{nn}\}^{m_n}.$$

Ce résultat donne lieu aux remarques suivantes :

1° $L[s, s', s'']$ est une somme de fonctions homogènes λ_2, qui sont à la fois des invariants pour les systèmes (σ') à n variables et pour le système (σ'') à n — 1 variables $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$.

2° Les fonctions λ_2 sont des semi-invariants de première espèce, pour les formes à n — 2 variables

$$\begin{gathered}
a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-2}x_{n-2}, \\
b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_{n-2}x_{n-2}, \\
\cdots\cdots\cdots \\
k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_{n-2}x_{n-2}.
\end{gathered}$$



Par des transformations analogues à celles que nous avons développées, on déduit de $L[s]$ une fonction

$$L[s', s'' \dots s^{(h)} \dots s^{(n-1)}, s^{(n)}]$$

dans laquelle la lettre $s^{(h)}$ se rapporte aux coefficients d'un système $(\sigma^{(h)})$ de formes linéaires à $n - h + 1$ variables; les différents systèmes (σ) se rapportent à des séries de variables différentes; $\sigma^{(h)}$, par exemple, contient des formes relatives à $u_1, u_2, \dots u_{n-h+1}$, telles que

$$\left.\begin{array}{l} l_1 u_1 + l_2 u_2 + \cdots + l_{n-h+1} u_{n-h+1}, \\ l'_1 u_1 + l'_2 u_2 + \cdots + l'_{n-h+1} u_{n-h+1}, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \dots\dots\dots \quad (\sigma^{(h)})$$

La fonction $L[s', s'', \dots s^{(n)}]$ jouit des propriétés suivantes :

1° Elle se réduit à $L[s]$ quand on identifie, d'une certaine manière, les séries de coefficients $s, s', s'', \dots s^{(n)}$;

2° Elle peut s'exprimer comme somme de fonctions λ_n qui sont des invariants pour chacun des systèmes (σ'), (σ''), ... (σ^n); les invariants λ_n ont, par rapport aux systèmes (σ'), (σ''), ... (σ^n), les *indices* m_n, $m_{n-1} - m_n$, $m_{n-2} - m_{n-1}$, .. $m_1 - m_2$ *.

IX. Prenons

$$L[s', s'', \dots s^{(n)}] = \Sigma R . T_h,$$

en réunissant dans T_h tous les facteurs $s^{(h)}$.

Formons, au moyen des séries de coefficients $s^{(h)}$, les groupes de déterminants d'ordre $n - h + 1$, dont les termes diagonaux ont pour produit T_h. Soit P_h la somme des résultats obtenus en multipliant les uns par les autres les déterminants de chaque groupe. Nous aurons, à part un facteur numérique

$$L[s, s' s'' \dots s^{(n)}] = \Sigma R . P_h.$$

* Quand on effectue une transformation linéaire, une fonction invariante se reproduit multipliée par une puissance du module : l'indice de cette puissance est l'*indice* de la fonction invariante.



Cette formule s'obtient par l'application du théorème de Clebsch, sur l'expression des invariants du premier degré, pour des formes linéaires (*Journal de Crelle,* tome LIX).

On pourra de la même manière développer ΣRP_h, comme invariant d'un autre système $(\sigma^{(h')})$, et ainsi de suite. On peut donc écrire la fonction $L[s', s'', \ldots s^{(n)}]$ comme une somme de produits de déterminants d'ordre ... 1, 2, 3, ... n, tels que

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & \ldots & l_{n-h+1} \\ l'_1 & l'_2 & \ldots & l'_{n-h+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

En égalant certaines séries de coefficients à (a), (b), ... (k), on obtiendra le développement de $L[s]$; on aura ensuite l'expression symbolique d'un semi-invariant de première espèce, en supposant que certaines formes a_x, b_x, ... k_x sont égales entre elles (§ IV).

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Tout semi-invariant de première espèce ψ *a pour expression symbolique une somme de produits de déterminants d'ordres* h = 1, 2, 3, ... n, *tels que*

$$\delta_h = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_h \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_h \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

REMARQUE. — La fonction ψ étant de poids $m_1, m_2, \ldots m_n$ pour les indices 1, 2, 3, ... n, son expression symbolique est une somme de produits de m_n déterminants δ_n, de $m_{n-1} - m_n$ déterminants δ_{n-1}, etc., et en général de $m_h - m_{h+1}$ déterminants δ_h.

EXEMPLE. — L'expression

$$a_1^2 b_1^3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^5 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}^4$$

représente symboliquement un semi-invariant de première espèce.

X. D'après le théorème précédent, l'expression symbolique ψ'' d'un semi-invariant de première espèce ψ peut s'écrire

$$\psi'' = \Sigma \Pi (\delta_h) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Nous supposerons que ψ'' contient les séries de coefficients

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \dots & a_n, \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n, \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ g_1 & g_2 & \dots & g_n; \end{array}$$

les déterminants δ_h d'ordre h seront alors formés au moyen des h premières colonnes du tableau précédent.

Considérons maintenant n séries de variables cogrédientes

$$\begin{array}{ccccc|c} (x) & x_1 & x_2 & \dots & x_n & (1) \\ (y) & y_1 & y_1 & \dots & x_n & (2) \\ . & . & . & . & . & \dots \\ (v) & v_1 & v_2 & \dots & v_n & (h) \\ . & . & . & . & . & \dots \\ (w) & w_1 & w_2 & \dots & w_n & (n) \end{array}$$

Désignons par Ψ'' la fonction que l'on obtient en remplaçant dans ψ'' les déterminants

$$\delta_h = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_h \\ b_1 & b_2 & \dots & b_h \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix},$$

par

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} a_x & a_y & \dots & a_v \\ b_x & b_y & \dots & b_v \\ . & . & . & . \end{vmatrix}.$$

La fonction Ψ'' représente symboliquement un covariant Ψ, dans lequel le semi-invariant de première espèce ψ est le coefficient des plus hautes puissances de $x_1, y_2, z_3, \dots v_h, \dots w_n$.

D'après la formule (7), nous écrirons

$$\Psi'' = \Sigma\,\Pi\,(\Delta_h); \qquad (8)$$

le second membre de cette équation est une somme de produits de m_n déterminants Δ_n, de $m_{n-1} - m_n$ déterminants Δ_{n-1}, de $m_{n-2} - m_{n-1}$ déterminants Δ_{n-2}, etc. *.

Recherchons dans le développement de Ψ'' le coefficient χ_0 du produit

$$P = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \dots y_n^{\beta_n} \dots w_1^{\mu_1} w_2^{\mu_2} \dots w_n^{\mu_n}, \qquad (9)$$

en supposant

$$\left.\begin{array}{c} \alpha_i + \beta_i + \cdots + \mu_i = m_i, \\ i = 1, 2, 3, \dots n. \end{array}\right\} ^{**}$$

La formule (8) conduit à faire la remarque suivante : Pour obtenir dans $\Pi(\Delta_h)$ un terme contenant le produit P, il faut considérer dans les déterminants $\Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_n$ les combinaisons des $x, y, z, \dots w$, qui sont comprises dans les déterminants

$$x_1, \; (x_1 y_2), \; (x_1 y_2 z_3), \; \dots \; (x_1 y_2 \dots w_n).$$

On trouve par suite

$$\chi_0 = \theta \times \psi'', \qquad (10)$$

si l'on représente par θ le coefficient de P dans le produit $x_1^{m_1 - m_2} (x_1 y_2)^{m_2 - m_3} \dots$ $\dots (x_1 y_2 \dots w_n)^{m_n}$.

Dans le paragraphe suivant, nous déterminerons la même quantité χ_0 par une méthode différente ; en comparant les deux expressions de χ_0, nous obtiendrons une propriété importante des semi-invariants de première espèce.

* Le covariant Ψ' est divisible par $(x_1 y_2 \dots w_n)^{m_n}$: le quotient est un covariant Ψ_0, contenant seulement $n - 1$ séries de variables. Dans un autre travail, nous montrerons que tous les covariants sont réductibles, au moyen d'opérations polaires, aux covariants analogues à Ψ_0.

** On a nécessairement

$$\begin{array}{c} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = m_1, \\ \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = m_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = m_n. \end{array}$$



XI. Soit

$$\left.\begin{array}{l} a'_x = a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + \cdots + a'_n x_n \\ b'_y = b'_1 y_1 + b'_2 y_2 + \cdots + b'_n y_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f'_w = f'_1 w_1 + f'_2 w_2 + \cdots + f'_n w_n, \end{array}\right\}$$

un nouveau système de n formes linéaires. Nous emploierons, suivant l'usage, la notation $a\frac{d}{da'}$ pour représenter l'opération polaire des coefficients a sur les coefficients a' : nous aurons ainsi

$$a\frac{d}{da'} = a_1\frac{d}{da'_1} + a_2\frac{d}{da'_2} + \cdots + a_n\frac{d}{da'_n}.$$

La notation $\left(a\frac{d}{db'}\right)^{\beta}\left(a\frac{d}{da'}\right)^{\alpha}$ représentera l'opération $a\frac{d}{db'}$, appliquée β fois, au résultat de l'opération $a\frac{d}{da'}$ appliquée α fois de suite. La généralisation s'indique d'elle-même.

Cela posé, considérons un produit quelconque

$$p = a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} \dots g_1^{\mu_1} a_2^{\alpha_2} b_2^{\beta_2} \dots g_2^{\mu_2} \dots a_n^{\alpha_n} \dots g_n^{\mu_n},$$

dans lequel on a

$$\alpha_i + \beta_i + \cdots + \mu_i = m_i, \quad (i = 1, 2, 3, \dots n).$$

Nous pouvons écrire

$$p = \mathrm{O}_1 \mathrm{O}_2 \dots \mathrm{O}_n\, a_1'^{m_1} b_2'^{m_2} \dots f_n'^{m_n}, \; *$$

en prenant

$$\mathrm{O}_1 = \frac{1}{m_1!}\left(a\frac{d}{da'}\right)^{\alpha_1}\left(b\frac{d}{da'}\right)^{\beta_1} \dots \left(g\frac{d}{da'}\right)^{\mu_1},$$

$$\mathrm{O}_2 = \frac{1}{m_2!}\left(a\frac{d}{db'}\right)^{\alpha_2}\left(b\frac{d}{db'}\right)^{\beta_2} \dots \left(g\frac{d}{db'}\right)^{\mu_2},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

* Cette relation se vérifie immédiatement. M. Capelli a fait usage d'une formule analogue dans ses *Fondamenti di una Teoria generale delle forme algebriche* (Memorie della Acad. dei Lincei, 3e série, t. XII, p. 536).

Ainsi, la fonction ψ'' se déduit de $a_1'^{m_1} b_2'^{m_2} \dots f_n'^{m_n}$, au moyen d'une opération O, réductible à des polaires successives des coefficients $a, b, \dots g$ sur les coefficients $a', b', \dots f'$: nous écrirons en conséquence

$$\psi'' = \mathrm{O} a_1'^{m_1} b_2'^{m_2} \dots f_n'^{m_n}.$$

D'après la nature même de l'opération O, on obtient la quantité $\mathrm{O} a_x'^{m_1} b_y'^{m_2} \dots f_w'^{m_n}$ en remplaçant dans la fonction ψ'', les lettres

$$a_1,\ b_1,\ \dots\ g_1;\ a_2,\ b_2,\ \dots\ g_2;\ \dots;\ a_n,\ b_n,\ \dots\ g_n,$$

par les formes

$$a_x,\ b_x,\ \dots\ g_x;\ a_y,\ b_y,\ \dots\ g_y;\ \dots;\ a_w,\ b_w,\ \dots\ g_w:$$

or, cette modification transforme ψ'' en Ψ'' (§ X); on a donc

$$\Psi'' = \mathrm{O} a_x'^{m_1} b_y'^{m_2} \dots f_w'^{m_n}.$$

Au moyen de cette relation, déterminons dans la fonction Ψ'' le coefficient χ_0 du produit P [formule (9)]; nous trouvons immédiatement

$$\left.\begin{array}{l} \chi_0 = \begin{pmatrix} m_1 \\ \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 \\ \beta_1\beta_2\dots\beta_n \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} m_n \\ \mu_1\mu_2\dots\mu_n \end{pmatrix} \\ \times \mathrm{O} a_1'^{\alpha_1} a_2'^{\alpha_2} \dots a_n'^{\alpha_n} . b_1'^{\beta_1} b_2'^{\beta_2} \dots b_n'^{\beta_n} \dots f_1'^{\mu_1} f_2'^{\mu_2} \dots f_n'^{\mu_n} \end{array}\right\} \quad \dots \quad (11)$$

La comparaison des formules (10) et (11) donne

$$\eta_1 \psi'' = \theta \times \mathrm{O} a_1'^{\alpha_1} a_2'^{\alpha_2} \dots a_n'^{\alpha_n} b_1'^{\beta_1} \dots b_n'^{\beta_n} \dots f_1'^{\mu_1} f_2'^{\mu_2} \dots f_n'^{\mu_n},$$

η_1 étant un facteur numérique positif et différent de zéro, en même temps que θ.

Additionnons membre à membre toutes les formules analogues*; d'après

* Ces formules s'obtiennent en prenant pour $(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n,\ \beta_1\beta_2\dots\beta_n,\ \dots\ \mu_1\mu_2\dots\mu_n)$ tous les systèmes de nombres, qui satisfont aux relations

$$\alpha_i + \beta_i + \dots + \mu_i = m_i, (i = 1, 2, 3, \dots n),$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m_1,$$
$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = m_2,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = m_n.$$

la valeur du coefficient θ (§ X), nous trouvons

$$\eta\psi'' = \Theta a_1'^{m_1-m_2} (a_1'b_2')^{m_2-m_3} . (a_1'b_2'c_3')^{m_3-m_4} \ldots (a_1'b_2' \ldots f_n')^{m_n},$$

en désignant par η un facteur numérique différent de zéro, qui dépend seulement de m_1, m_2, ... m_n.

La dernière formule exprime ce théorème :

L'expression symbolique ψ'' d'un semi-invariant de première espèce peut se déduire de

$$a_1'^{m_1-m_2} (a_1'b_2')^{m_2-m_3} (a_1'b_2'c_3')^{m_3-m_4} \ldots (a_1'b_2' \ldots f_n')^{m_n}.$$

au moyen d'opérations polaires, relatives aux coefficients a', b', ... f'.

Exemple. — Soit

$$\psi'' = a_1 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & g_1 \\ b_2 & c_2 & g_2 \\ b_3 & c_3 & g_3 \end{vmatrix};$$

on trouve $4\psi'' = \Theta a_1' (a_1' b_2' c_3')$, en prenant :

$$\Theta = \frac{1}{2} a \frac{d}{da'} \begin{vmatrix} b\frac{d}{da'} & c\frac{d}{da'} & g\frac{d}{da'} \\ b\frac{d}{db'} & c\frac{d}{db'} & g\frac{d}{db'} \\ b\frac{d}{dc'} & c\frac{d}{dc'} & g\frac{d}{dc'} \end{vmatrix}.$$

XII. Les résultats, que nous avons obtenus, s'appliquent aux semi-covariants de seconde espèce, formés uniquement au moyen de différentes séries de variables cogrédientes :

$$\begin{array}{cccc|l} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & 1) \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n & 2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ w_1 & w_2 & \ldots & w_n & n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\tau)$$

Nous supposerons que l'on remplace les variables $(x)(y)\ldots(u)\ldots$ par

(X) (Y) ... (U) ..., au moyen d'une transformation linéaire de module

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Soit $\chi(x, y, z, \dots u, \dots)$ une fonction homogène et isobarique formée uniquement au moyen des variables $x, y, z \dots u \dots$ Nous dirons que $\chi(x, y, \dots u \dots)$ est un *semi-covariant identique de seconde espèce,* si l'on a

$$\chi(x, y, \dots u \dots) = \alpha_{11}^{p_1} \alpha_{22}^{p_2} \dots \alpha_{nn}^{p_n} \chi(X, Y, \dots U \dots);$$

$(-p_1)$, $(-p_2)$, ... $(-p_n)$ sont alors les poids de la fonction χ pour les indices 1, 2, 3, ... n*. D'après les propriétés des semi-invariants de première espèce on peut vérifier les propositions suivantes :

1° *Une fonction homogène et isobarique, formée au moyen des variables* x, y, ..., *est un semi-covariant identique de seconde espèce, si elle satisfait aux relations*

$$x_i \frac{d}{dx_{i+1}} + y_i \frac{d}{dy_{i+1}} + \dots = 0, \ \dots \ (i = 1, 2, 3, \dots n - 1).$$

2° *Pour tout semi-covariant identique de seconde espèce, la valeur absolue* p_i *du poids pour l'indice* i, *est égale ou supérieure à la valeur absolue* p_{i+1} *du poids pour l'indice* i + 1.

3° *Tout semi-covariant identique de seconde espèce s'exprime comme somme de produits de déterminants d'ordre* h = 1, 2, 3, ... n, *formés au moyen des* h *premières colonnes du tableau* (τ) *des variables.*

4° *Tout semi-covariant identique de seconde espèce est une somme de polaires de*

$$x_1'^{p_1-p_2} (x_1'y_2')^{p_2-p_3} (x_1'y_2'z_3')^{p_3-p_4} \dots (x_1'y_2' \dots w_n')^{p_n},$$

par rapport aux séries de variables x', y', ... w'.

* Voir la note du paragraphe I.

SUR
LES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES
ET
LA THÉORIE DES COVARIANTS;

PAR

JACQUES DERUYTS,

CHARGÉ DE COURS A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 6 avril 1889.)

SUR

LES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES

ET

LA THÉORIE DES COVARIANTS.

Dans des recherches antérieures sur la théorie des formes algébriques *, nous avons été amené à considérer l'étude des transformations linéaires comme la source des procédés de formation pour les fonctions invariantes. Cet ordre d'idées conduit naturellement à examiner l'effet d'une transformation linéaire, sur les fonctions entières des coefficients de formes algébriques à n variables. Le travail actuel contient les résultats que nous avons obtenus dans cette voie.

Nous signalerons d'abord cette relation très simple (§ IV) : « la *transformée* d'une fonction entière de coefficients de formes algébriques se ramène, par un changement de notation, à un covariant à n séries de variables. »

D'après les résultats de notre étude, tout covariant de poids zéro, à n séries de variables, se ramène à certains covariants, que nous appelons *covariants primaires* et qui contiennent $n - 1$ séries de variables.

Les conséquences de cette réduction conduisent à ce théorème général :

« Tout covariant, contenant un nombre quelconque de séries de variables, est une somme de covariants identiques multipliés par des polaires de covariants primaires. »

* *Sur la différentiation mutuelle des fonctions invariantes* (Bull. de l'Académie royale de Belgique, août 1888). *Sur quelques propriétés des transformations linéaires* (Ibid., décembre 1888).



I. Soit p, une quantité isobarique * homogène et fonction entière des coefficients c, de formes algébriques f à n variables $x_1, x_2, \ldots x_n$. Effectuons sur les variables la transformation linéaire de module :

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix},$$

et désignons par C, les coefficients des formes f exprimées au moyen des nouvelles variables. Les quantités C sont fonctions entières des éléments α_{ij} et elles s'expriment linéairement au moyen des coefficients primitifs, c. Soit P, la quantité obtenue en remplaçant dans p, les lettres c par les lettres C correspondantes : nous dirons que P est la *transformée* de p par la substitution δ : en général, nous conviendrons de représenter par une lettre majuscule la transformée de la quantité représentée par la lettre minuscule correspondante.

La quantité P s'écrira :

$$P = \lambda_{11}p_1 + \lambda_{12}p_2 + \cdots + \lambda_{1r}p_r; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

dans cette formule, les lettres λ représentent des fonctions entières des éléments α_{ij} : $p_1, p_2, p_3 \ldots p_r$ sont des fonctions analogues à p. Nous supposerons que le nombre r des quantités p_i est le plus petit possible; de cette manière, il ne pourra exister aucune relation linéaire entre $p_1, p_2, \ldots p_r$.

La quantité P se réduit à p pour $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \ldots = \alpha_{nn} = 1$, $\alpha_{ij} = 0\ (i \gtrless j)$: par conséquent, nous pouvons supposer $p_1 = p$.

II. *Les transformées de* $p_2, p_3, \ldots p_r$ *sont exprimables linéairement au moyen de* $p_1, p_2, \ldots p_r$.

En effet, soit P'' la transformée de p, quand on effectue successivement

* Afin d'éviter de longues répétitions, nous renvoyons à nos travaux antérieurs pour la signification des termes : *isobarique*, *poids relatif à l'indice* i; il en est de même pour la notation (h, l) dont nous ferons usage dans la suite.

sur les variables, la transformation de module δ et la transformation de module

$$\delta' = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{vmatrix};$$

nous aurons par la formule (1) :

$$P'' = \lambda'_{11}P_1 + \lambda'_{12}P_2 + \cdot \cdot + \lambda'_{1r}P_r, \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

en désignant par λ' les quantités déduites de λ, par la substitution des lettres β aux lettres α. D'un autre côté, les transformations de module δ, δ' effectuées successivement sont équivalentes à la transformation de module :

$$\delta'' = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{vmatrix},$$

si l'on suppose

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \dots + \alpha_{in}\beta_{nj}.$$

Représentons par λ'' les valeurs que prennent les fonctions λ, quand on substitue aux éléments α_{ij} les éléments γ_{ij} ; nous aurons, d'après la formule (1) :

$$P'' = \lambda''_{11}p_1 + \lambda''_{12}p_2 + \cdot \cdot + \lambda''_{1r}p_r.$$

Dans les deux membres de l'équation

$$\lambda'_{11}P_1 + \lambda'_{12}P_2 + \dots + \lambda'_{1r}P_r = \lambda''_{11}p_1 + \lambda''_{12}p_2 + \dots + \lambda''_{1r}p_r, \quad \dots \dots \quad (3)$$

les coefficients des mêmes produits d'éléments β_{ij} sont nécessairement égaux entre eux : en les identifiant, on obtiendra des équations linéaires $L = 0$, entre les quantités P_1, P_2, ... P_r, p_1, p_2, ... p_r. Admettons pour un instant, que l'on ne puisse pas résoudre ces équations par rapport à P_1, P_2, ... P_r :

d'après la formule (2), la quantité P'' sera la somme des produits de fonctions entières des éléments β_{ij}, par $r - r'$ $(r' > 0)$ combinaisons de $P_1, P_2, \ldots P_r$; ces combinaisons étant linéaires et à coefficients numériques. On pourrait donc réduire à $r - r'$ le nombre des fonctions p_i, qui servent à exprimer P [formule (1)] : cette réduction est contraire aux conventions établies ci-dessus. En conséquence, on peut déduire des équations $L = 0$, les valeurs de $P_1, P_2, \ldots P_r$ exprimées linéairement en fonction de $p_1, p_2, \ldots p_r$: la proposition énoncée se trouve ainsi établie.

Remarque. — D'après le théorème que nous venons de démontrer, on peut écrire les formules :

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \lambda_{11}p_1 + \lambda_{12}p_2 + \cdots + \lambda_{1r}p_r \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P_i = \lambda_{i1}p_1 + \lambda_{i2}p_2 + \cdots + \lambda_{ir}p_r \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P_r = \lambda_{r1}p_1 + \lambda_{r2}p_2 + \cdots + \lambda_{rr}p_r \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

les lettres λ représentant des fonctions entières des éléments α du module δ.

Par l'identification des coefficients de $p_1, p_2, \ldots p_r$, dans la formule (3), on obtient :

$$\left.\begin{array}{l} \lambda''_{11} = \lambda'_{11}\lambda_{11} + \lambda'_{12}\lambda_{21} + \cdots + \lambda'_{1r}\lambda_{r1} \\ \lambda''_{12} = \lambda'_{11}\lambda_{12} + \lambda'_{12}\lambda_{22} + \cdots + \lambda'_{1r}\lambda_{r2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda''_{1r} = \lambda'_{11}\lambda_{1r} + \lambda'_{12}\lambda_{2r} + \cdots + \lambda'_{1r}\lambda_{rr} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Les quantités γ_{ij}, λ''_{1i} ont pour transformées β_{ij}, λ'_{1i} si on considère les éléments γ_{ij} comme formant des séries de quantités cogrédientes à x_1, $x_2, \ldots x_n$, savoir :

$$\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots \gamma_{n1};\ \gamma_{12}, \gamma_{22}, \ldots \gamma_{n2};\ \ldots;\ \gamma_{1n}, \gamma_{2n} \ldots \gamma_{nn}.$$

On déduit facilement des formules (5), que les transformées $\lambda'_{11}, \lambda'_{12}, \ldots \lambda'_{r}$ de $\lambda''_{11}, \lambda''_{12}, \ldots \lambda''_{1r}$ sont des fonctions linéaires de $\lambda''_{11}, \lambda''_{21}, \ldots \lambda''_{1r}$. Désignons par $(\lambda_{11}), (\lambda_{12}), \ldots (\lambda_{1r})$ les quantités que l'on déduit de $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \ldots \lambda_{1r}$ en remplaçant les suites d'éléments

$$(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots \alpha_{n1});\ (\alpha_{12}, \alpha_{22}, \ldots \alpha_{n2});\ \ldots\ (\alpha_{1n}, \alpha_{2n} \ldots \alpha_{nn})$$

par des séries de variables cogrédientes à $(x_1, x_2, \dots x_n)$; nous pouvons énoncer cette propriété :

Les transformées des quantités $(\lambda_{11}), (\lambda_{12}), \dots (\lambda_{1r})$ *s'expriment linéairement en fonction de* $(\lambda_{11}), (\lambda_{12}), \dots (\lambda_{1r})$ *.

III. Représentons en général une forme linéaire par $s_1x_1 + s_2x_2 + \cdots + s_nx_n$. Soit O, une opération réductible à des *polaires* successives telles que

$$s\frac{d}{d\alpha_i} = s_1\frac{d}{d\alpha_{i1}} + s_2\frac{d}{d\alpha_{i2}} + \cdots + s_n\frac{d}{d\alpha_{in}}.$$

En employant la notation symbolique d'Aronhold, nous établirons ce théorème :

Si l'on a symboliquement $p_1 \equiv O\lambda_{11}$, *la transformée de toute combinaison linéaire de* $p_1, p_2, \dots p_r$ *contient nécessairement la quantité* p_1.

Il suffira de prouver que dans les relations (4), les fonctions $\lambda_{11}, \lambda_{21}, \dots \lambda_{r1}$ sont linéairement indépendantes. Contrairement à la propriété que nous voulons établir, supposons par exemple que l'on puisse exprimer λ_{r1} par une combinaison linéaire de $\lambda_{11}, \lambda_{21}, \dots \lambda_{r-1,1}$; nous aurons, par la première des formules (5), une relation de la forme :

$$\lambda''_{11} = \lambda'_1\lambda_{11} + \lambda'_2\lambda_{21} + \cdots + \lambda'_{r-1}\lambda_{r-1,1};$$

puis

$$O\lambda''_{11} = \lambda'_1 O\lambda_{11} + \lambda'_2 O\lambda_{21} + \cdots + \lambda'_{r-1} O\lambda_{r-1,1} \quad \text{. . . . .} \quad (5')$$

On a, par hypothèse, $O\lambda_{11} \equiv p_1$; de plus, les quantités $O\lambda_{11}, O\lambda_{21}, \dots O\lambda_{r-1.1}$ contiennent les mêmes symboles de formes algébriques et aux mêmes degrés. Il résulte de là, que $O\lambda_{21}, O\lambda_{31}, \dots O\lambda_{r-1.1}$ sont les expressions symboliques de fonctions $p'_2, p'_3, \dots p'_{r-1}$ analogues à p_1. D'autre part, $O\lambda''_{11}$ représente la transformée P'_1 de la quantité p_1, pour le module $\delta' = \Sigma \pm \beta_{11}\beta_{22} \dots \beta_{nn}$ **.

* Les transformées des quantités (λ_{1i}) s'obtiennent en remplaçant les diverses variables par les variables nouvelles correspondantes.

** La quantité λ''_{11} s'obtient en remplaçant, dans λ_{11}, les éléments α_{ij} par $\beta_{1j}\alpha_{i1} + \beta_{2j}\alpha_{i2} + \cdots + \beta_{nj}\alpha_{in}$. De même, la transformée de $O\lambda_{11}$ s'obtient en remplaçant les coefficients s_j par



En conséquence, nous aurons par la formule (5′) : $P'_1 = \lambda'_1 p_1 + \lambda'_2 p'_2 + \ldots + \lambda'_{r-1} p'_{r-1}$.

Ce résultat est contraire aux suppositions indiquées précédemment : en effet, nous avons admis que l'expression de P'_1, réduite au nombre le plus petit possible de termes, peut s'écrire

$$P'_1 = \lambda'_{11} p_1 + \lambda'_{12} p_2 + \cdots + \lambda'_{1r} p_r$$

Par suite, les quantités λ_{11}, λ_{21}, ... λ_{r1} sont linéairement indépendantes : c'est le résultat que nous avions en vue.

IV. On sait que la fonction p, du reste quelconque, est le coefficient des plus hautes puissances de $x_1, y_2, z_3 \ldots w_n$ dans un covariant $[p]$ à n séries de variables :

$$\begin{array}{ccccc|l} (x) & x_1 & x_2 & \ldots & x_n & 1) \\ (y) & y_1 & y_2 & \ldots & y_n & 2) \\ (z) & z_1 & z_2 & \ldots & z_n & 3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ (w) & w_1 & w_2 & \ldots & w_n & n). \end{array}$$

Pour abréger, nous dirons que la quantité p est la *source* du covariant $[p]$.

La fonction p s'écrira symboliquement

$$p \equiv \Sigma \varepsilon a_1^{h_1} a_2^{h_2} \ldots a_n^{h_n} b_1^{k_1} b_2^{k_2} \ldots b_n^{k_n} \ldots ;$$

ε est un facteur numérique et a_i, b_i, ... sont les coefficients de x_i dans des formes linéaires a_x, b_x, ... On voit immédiatement que p est la source du covariant $[p]$ représenté symboliquement par

$$\Sigma \varepsilon a_x^{h_1} b_x^{k_1} \ldots \times a_y^{h_2} b_y^{k_2} \ldots \times a_w^{h_n} b_w^{k_n} \ldots .$$

$\beta_{1j} s_1 + \beta_{2j} s_2 + \cdots + \beta_{nj} s_n$. Il résulte de là que la transformée de $O\lambda_{11}$ est précisément $O\lambda''_{11}$: d'un autre côté, l'expression symbolique de P'_1 est la transformée de $O\lambda_{11}$. On a donc $P'_1 \equiv O\lambda''_{11}$.



D'autre part, la fonction P, transformée de p par la substitution δ, s'écrit symboliquement

$$\begin{aligned} \mathrm{P} \equiv \Sigma\varepsilon & (a_1\alpha_{11} + a_2\alpha_{21} + \cdots + a_n\alpha_{n1})^{h_1}(b_1\alpha_{11} + \cdots + b_n\alpha_{n1})^{k_1}\ldots \\ & \times(a_1\alpha_{12} + a_2\alpha_{22} + \cdots + a_n\alpha_{n2})^{h_2}(b_1\alpha_{12} + \cdots + b_n\alpha_{n2})^{k_2}\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times(a_1\alpha_{1n} + a_2\alpha_{2n} + \cdots + a_n\alpha_{nn})^{h_n}(b_1\alpha_{1n} + \cdots + b_n\alpha_{nn})^{k_n}\ldots \end{aligned}$$

D'après ce développement, *tout covariant* [p], *de poids zéro et à* n *séries de* n *variables* x, y, z, ... w, *s'obtient au moyen de la transformée* P *de sa source* p *en remplaçant les lettres* $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots \alpha_{in}$ *par* $\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i, \ldots \mathrm{w}_i$ $(\mathrm{i} = 1, 2, 3, \ldots \mathrm{n})$.

V. Désignons par S_1 la suite des quantités $p_1, p_2, \ldots p_r$, pour lesquelles le poids relatif à l'indice 1 a la valeur la plus élevée. Soient $S_2, \ldots S_{i-1}$, $S_i, \ldots S_{n-1}$ les suites de quantités p, déterminées par cette condition que S_i comprend les termes de la suite S_{i-1}, pour lesquels le poids relatif à l'indice i est le plus grand.

Soit p_g un terme de la suite S_{n-1} : nous représenterons par $m_1, m_2, \ldots m_n$ les poids de p_g par rapport aux indices $1, 2, \ldots, n$.

Si nous effectuons sur les variables la transformation linéaire

$$x_1 = \mathrm{X}_1 + \alpha_{12}\mathrm{X}_2, \quad x_i = \mathrm{X}_i, \quad (i > 1)$$

la transformée P_g, de p_g, a pour expression

$$p_g + \frac{1}{1}\alpha_{12}(2,1)p_g + \frac{1}{1.2}\alpha_{12}^2(2,1)^2p_g + \cdots \text{ *}$$

Or, la quantité $(2, 1)p_g$ a le poids $m_1 + 1$ pour l'indice 1 et, d'après les formules (4), elle doit être ou bien nulle, ou bien fonction linéaire de p_1, $p_2, \ldots p_r$. La deuxième supposition doit être écartée : en effet, d'après le

* Voir notre travail *Sur la théorie des formes à un nombre quelconque de variables* (Bull. de l'Acad. royale de Belgique, juin 1888).



mode de formation des suites $S_1, S_2, \ldots S_{n-1}$, les quantités $p_1, p_2, \ldots p_r$ ont au plus le poids m_1 pour l'indice 1. On a donc :

$$(2, 1)\, p_g = 0.$$

Semblablement, si l'on effectue sur les variables la transformation

$$x_2 = X_2 + \alpha_{23} X_3, \quad x_i = X_i, \quad (i \gtrless 2),$$

la fonction P_g s'exprime par

$$p_g + \frac{1}{1}\alpha_{23}(3, 2)\, p_g + \frac{1}{1.2}\alpha_{23}^2 (3, 2)^2\, p_g + \cdots$$

La quantité $(3, 2)\, p_g$ a pour poids m_1, $m_2 + 1$, relativement aux indices 1, 2. Par hypothèse, les termes de $(p_1, p_2, \ldots p_r)$, qui ont le poids m_1 pour l'indice 1, ont au plus le poids m_2 pour l'indice 2; on déduit de là

$$(3, 2)\, p_g = 0.$$

En continuant ainsi de suite, on vérifiera les équations

$$(2, 1)\, p_g = 0, \quad (3, 2)\, p_g = 0, \quad (4, 3)\, p_g = 0, \ \ldots \ (n, n-1)\, p_g = 0 \quad . \ . \ . \quad (6)$$

VI. Dans des recherches *sur la généralisation des semi-invariants,* nous avons considéré certaines fonctions ψ, que nous avons appelées *semi-invariants de première espèce :* ces quantités sont des fonctions entières, isobariques et homogènes, des coefficients de formes algébriques; elles sont caractérisées par les équations

$$(2, 1)\, \psi = 0, \quad (3, 2)\, \psi = 0, \ \ldots \ (n, n-1)\, \psi = 0.$$

Nous avons montré que tout semi-invariant de première espèce ψ est la source d'un covariant Ψ d'une classe particulière, à n séries de n variables (x), $(y), \ldots (w)$: le covariant Ψ a pour expression symbolique une somme



de produits de déterminants analogues à

$$a_x, \quad \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d_x & d_y & d_z \\ e_x & e_y & e_z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} g_x & g_y & g_z & \cdots & g_w \\ h_x & h_y & h_z & \cdots & h_w \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_x & k_y & k_z & \cdots & k_w \end{vmatrix} *;$$

dans chacun de ces déterminants, la première colonne contient des formes linéaires relatives aux variables x; la deuxième colonne contient les mêmes formes rapportées aux variables y; la troisième contient les mêmes formes rapportées aux variables z et ainsi de suite.

Nous avons rattaché à l'étude des semi-invariants de première espèce, d'autres quantités homogènes et isobariques, que nous avons désignées sous le nom de *semi-covariants identiques de seconde espèce*. Ces quantités sont fonctions entières de séries de variables cogrédientes (x), (y), etc...; elles sont caractérisées par les équations

$$x_i \frac{d}{dx_{i+1}} + y_i \frac{d}{dy_{i+1}} + \cdots = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots n - 1).$$

Dans le cours du présent travail, nous aurons à faire usage des fonctions semi-invariantes, dont nous venons de rappeler les définitions.

VII. Il résulte des considérations précédentes et des formules (6), que la fonction p_g est la source d'un covariant analogue à Ψ; nous représenterons ce covariant par la lettre Ψ elle-même.

D'après la relation établie ci-dessus (§ IV) entre un covariant et la transformée de sa source, la quantité P_g, transformée de p_g, s'exprime linéairement au moyen des coefficients de Ψ. Nous écrirons :

$$P_g = \theta_1 \pi_1 + \theta_2 \pi_2 + \cdots + \theta_l \pi_l, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

* Chacun des produits contient comme facteurs : m_n déterminants d'ordre n; $m_{n-1} - m_n$ déterminants d'ordre $n - 1$, etc., et enfin $m_1 - m_2$ déterminants d'ordre 1 (analogues à a_x). Les nombres $m_1, m_2, \ldots m_n$ sont les poids de ψ pour les indices 1, 2, 3, ... n.



en faisant les conventions suivantes :

1° $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_l$ représentent des quantités linéaires par rapport aux coefficients de Ψ et indépendantes des éléments α du module $\delta = \Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22} \dots \alpha_{nn}$.

2° $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_l$ désignent des fonctions qui contiennent seulement les éléments α.

3° Dans la formule (7), les quantités $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_l$ sont réduites au nombre le plus petit possible.

Du reste, l'une des quantités $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_l$ peut être supposée égale à p_g; nous prendrons

$$\pi_1 = p_g.$$

D'après une propriété démontrée au paragraphe II, le nombre l ne peut être supérieur au nombre r.

On obtient immédiatement, par la formule (7), le développement de Ψ; nous écrirons

$$\Psi = (\theta_1)\pi_1 + (\theta_2)\pi_2 + \cdots + (\theta_l)\pi_l, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7')$$

en désignant par (θ), les quantités que l'on déduit des fonctions θ, en remplaçant $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots \alpha_{in}$ par $x_i, y_i, \dots w_i$ $(i = 1, 2, 3, \dots n)$.

La comparaison des formules (5) et (7) donne

$$\lambda_{g1}p_1 + \lambda_{g2}p_2 + \cdots + \lambda_{gr}p_r = \theta_1\pi_1 + \theta_2\pi_2 + \cdots + \theta_l\pi_l.$$

Par l'identification des coefficients des mêmes produits d'éléments α, on obtient des relations linéaires entre $p_1, p_2, \dots p_r$ et $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_l$. Ces relations permettent d'exprimer linéairement $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_l$ au moyen de $p_1, p_2, \dots p_r$ * : les fonctions $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_l$ étant linéairement indépendantes, *on peut exprimer* l *termes de la suite* $(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \dots \mathrm{p}_r)$ *au moyen des* r — l *termes restants et de* $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_l$. Nous écrirons, en conséquence :

$$\mathrm{P} = \mu_1 q_1 + \mu_2 q_2 + \cdots + \mu_s q_s + \mu_{s+1}\pi_1 + \mu_{s+2}\pi_2 + \cdots + \mu_r\pi_l \quad \ldots \quad (8)$$

* Le mode de démonstration est tout à fait analogue à celui qui a été employé au paragraphe II.

Dans cette formule, $q_1, q_2, \ldots q_s$ représentent $r - l$ termes de la suite $(p_1, p_2, \ldots p_r)$; et les lettres μ désignent des fonctions contenant seulement les éléments α du module δ. Du reste, les quantités $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_r$ sont nécessairement différentes de zéro.

VIII. Appliquons à la quantité $p_g = \pi_1$ les résultats que nous avons obtenus précédemment pour la transformée d'une fonction quelconque p (§ II). D'après la comparaison des formules (1) et (7), *les transformées de* $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_l$ *sont exprimables linéairement au moyen de* $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_l$.

On trouve immédiatement que, dans la formule (7), la fonction θ_1 est égale à

$$\alpha_{11}^{m_1 - m_2} (\alpha_{11}\alpha_{22})^{m_2 - m_3} (\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33})^{m_3 - m_4} \ldots \text{*}$$

D'autre part, l'expression symbolique du semi-invariant de première espèce $\pi_1 = p_g$, se déduit de

$$a_1'^{m_1 - m_2} (a_1'b_2')^{m_2 - m_3} \cdot (a_1'b_2'c_3')^{m_3 - m_4} \ldots$$

par des opérations polaires relatives aux coefficients a', b', c', ... [Voir notre travail *Sur la généralisation des semi-invariants*, § XI.]

Nous écrirons donc symboliquement

$$\pi_1 \equiv O\theta_1,$$

en désignant par O une opération réductible à des polaires successives, analogues à

$$s\frac{d}{d\alpha_i} = s_1\frac{d}{d\alpha_{i1}} + s_2\frac{d}{d\alpha_{i2}} + \cdots + s_n\frac{d}{d\alpha_{in}}.$$

D'après les développements indiqués au paragraphe III, nous pouvons énoncer cette proposition :

La transformée de toute combinaison linéaire de $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_l$ *contient nécessairement la quantité* π_1.

* Il suffit de considérer l'expression symbolique du covariant Ψ (§ VI).

IX. Reprenons maintenant la formule (8); le covariant $[p]$ qui a pour source p s'écrira

$$[p] = (\mu_1) q_1 + (\mu_2) q_2 + \cdots + (\mu_s) q_s + (\mu_{s+1}) \pi_1 + \cdots + (\mu_r) \pi_t,$$

si l'on représente par (μ), la fonction obtenue en remplaçant dans μ, les lettres

$$\alpha_{i1}, \quad \alpha_{i2}, \quad \ldots \quad \alpha_{in},$$

par

$$x_i, \quad y_i, \quad \ldots \quad w_i, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots n).$$

Les différents termes du covariant $[p]$ ont leurs poids égaux à zéro, pour tous les indices : par conséquent, les fonctions correspondantes des deux séries

$$(\mu_1), \quad (\mu_2), \quad \ldots \quad (\mu_s), \quad (\mu_{s+1}), \quad (\mu_{s+2}), \quad \ldots \quad (\mu_r)$$

et

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots \quad q_s, \quad \pi_1, \quad \pi_2 \quad \ldots \quad \pi_t,$$

ont mêmes poids, en valeur absolue. En particulier, (μ_{s+1}) a pour poids $-m_1$, $-m_2$, ... $-m_n$, et il n'existe, dans la suite $[(\mu_1), (\mu_2), \ldots (\mu_r)]$, aucun terme qui ait, pour les indices 1, 2, 3 ... i, $i+1$, les poids $-m_1$, $-m_2$, $-m_3$, ... $-m_{i-1}$, $-m_i - e$, $(e > 0)$. D'un autre côté, quand on effectue une substitution linéaire sur les variables cogrédientes $(x), (y), \ldots (w)$, les transformées * de (μ_1), (μ_2), ... (μ_r) s'expriment linéairement en fonction de (μ_1), (μ_2), ... (μ_r). [§ II. — *Remarque*]. On déduit facilement de là :

$$x_i \frac{d}{dx_{i+1}} (\mu_{s+1}) + y_i \frac{d}{dy_{i+1}} (\mu_{s+1}) + \cdots$$
$$+ \cdots + w_i \frac{d}{dw_{i+1}} (\mu_{s+1}) = 0. \quad (i = 1, 2, 3, \ldots n-1).$$

Ces équations sont tout à fait analogues aux équations (6), et elles s'ob-

* D'après la substitution linéaire, les variables (x), (y), ... (w) sont remplacées par (X), (Y), ... (W); les *transformées* des fonctions (μ_1), (μ_2), ... (μ_r) s'obtiennent en substituant les lettres X, Y, ... W aux lettres x, y, ... w.

tiennent de la même manière; elles prouvent que (μ_{s+1}) est un semi-covariant identique de seconde espèce.

Or, tout semi-covariant identique de seconde espèce, peut se déduire de la fonction

$$(\theta'_1) = x_1'^{m_1-m_2} . (x'_1 y'_2)^{m_2-m_3} (x'_1 y'_2 z'_3)^{m_3-m_4} \dots$$

par une opération Λ, équivalente à des polaires effectuées par rapport aux différentes séries de variables $x'y' \dots w'$ et $x.y \dots$ *.

Désignons par Ψ' l'expression du covariant Ψ, dans laquelle on aurait remplacé les lettres $x, y, \dots w$ par $x', y', \dots w'$. Nous aurons, par la formule (7') :

$$\Lambda\Psi' = (\mu_{s+1})\pi_1 + (\mu^0_{s+2})\pi_2 + \cdots + (\mu^0_r)\pi_l, \quad \dots \dots \quad (9)$$

en représentant par $\mu^0_{s+2}, \mu^0_{s+3}, \dots \mu^0_r$, des quantités analogues à $\mu_{s+2} \dots \mu_r$. Soit π_0, la source du covariant $\Lambda\Psi'$; π_0 est nécessairement une fonction linéaire de $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_l$; sa transformée Π_0 s'obtient en remplaçant, dans le second membre de l'équation (9), les quantités $x_i, y_i, \dots w_i$, par $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots \alpha_{in}$ (§ IV). Nous aurons donc

$$\Pi_0 = \mu_{s+1}\pi_1 + \mu^0_{s+2}\pi_2 + \cdots + \mu^0_r\pi_l, \quad \dots \dots \quad (9')$$

puis :

$$P - \Pi_0 = \mu_1 q_1 + \mu_2 q_2 + \cdots + \mu_s q_s + \nu_2\pi_2 + \nu_3\pi_3 + \cdots + \nu_l\pi_l,$$

en posant

$$\nu_2 = \mu_{s+2} - \mu^0_{s+2}, \quad \nu_3 = \mu_{s+3} - \mu^0_{s+3}, \quad \dots\dots \quad \nu_l = \mu_r - \mu^0_r.$$

X. Nous établirons que *l'on peut exprimer* $P - \Pi_0$ *au moyen de* s *combinaisons linéaires de* $q_1, q_2, \dots q_s, \pi_2, \dots \pi_l$.

Si nous admettons l'inverse, $P - \Pi_0$ est une fonction linéaire, irréduc-

* Cette propriété correspond à la propriété des semi-invariants de première espèce, qui est exprimée (§ VIII) par la formule

$$\pi_1 \equiv 0\vartheta_1$$

(Voir notre travail cité plus haut.)



tible de $s+k$, $(k>0)$, quantités $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_{s+k}$, telles que

$$\omega = \rho_1 q_1 + \rho_2 q_2 + \cdots + \rho_s q_s + \sigma_2 \pi_2 + \cdots + \sigma_l \pi_l. \quad \quad (10)$$

(les lettres ρ, σ représentent des facteurs numériques).

Les transformées $\Omega_1, \Omega_2, \dots \Omega_{s+k}$ des quantités ω s'écriront

$$\Omega = \rho_1 Q_1 + \rho_2 Q_2 + \cdots + \rho_s Q_s + \sigma_2 \Pi_2 + \cdots + \sigma_l \Pi_l. \quad \quad (11)$$

Dans notre supposition $(k>0)$, on peut toujours obtenir une combinaison linéaire $\varphi(\Omega)$ des quantités $\Omega_1, \Omega_2, \dots \Omega_{s+k}$, de telle manière que l'on ait :

$$\varphi(\Omega) = \chi[\Pi_2, \Pi_3, \dots \Pi_n], \quad \quad (11')$$

la fonction χ contenant seulement, et au premier degré, les quantités Π_2, $\Pi_3, \dots \Pi_n$. En effet, désignons par M un déterminant formé des coefficients de $Q_1, Q_2, \dots Q_s$ dans s des expressions $\Omega_1, \Omega_2, \dots \Omega_{s+k}$ [formule (11)]. Si le déterminant M n'est pas nul, on peut satisfaire à la relation (11') par une combinaison linéaire φ de $s+1$ quantités Ω. Si, au contraire, on a $M=0$, la formule (11') est vérifiée par une combinaison linéaire φ de $s-h$ quantités Ω, $(h \geqq 0)$.

Nous observerons que, dans la formule (11'), la fonction χ ne peut pas être nulle, car les quantités ω ont été supposées linéairement indépendantes. D'un autre côté, $P - \Pi_0$ est fonction linéaire de $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_{s+k}$: les transformées Ω sont donc exprimables linéairement au moyen de $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_{s+k}$ (§ II); en outre, les quantités ω s'expriment en fonction de

$$q_1, q_2, \dots q_s, \pi_2, \pi_3, \dots \pi_l,$$

par les formules (10). En conséquence, nous pourrons remplacer l'équation (11') par :

$$\chi[\Pi_2, \Pi_3, \dots \Pi_n] = \Phi(q_1, q_2, \dots q_s, \pi_2, \dots \pi_l),$$

Φ étant une fonction du premier degré.

Précédemment, nous avons établi cette propriété : « la transformée de

toute combinaison linéaire de $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_l$ s'exprime nécessairement au moyen de π_1. » Cette propriété n'est pas vérifiée dans notre dernière formule; en effet, d'après les conventions admises, la quantité π_1 n'est pas fonction linéaire de $q_1, q_2, \ldots q_s, \pi_2, \ldots \pi_l$.

Il résulte de tout ceci que l'on ne peut pas supposer $k > 0$; $P - \Pi_0$ est donc exprimable au moyen de s quantités $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_s$. Du reste, il ne peut exister aucune réduction pour le nombre s de termes : en effet, Π_0 étant fonction linéaire de $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_l$, (9′), P serait exprimable au moyen de quantités en nombre inférieur à $s + l = r$. Cette conclusion serait contraire à la supposition faite au commencement de ce travail.

XI. D'après ce qui précède, nous écrirons

$$P - \Pi_0 = \varepsilon_1\omega_1 + \varepsilon_2\omega_2 + \cdots + \varepsilon_s\omega_s :$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_s$ sont des fonctions des éléments α du module de transformation ∂; $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_s$ sont des fonctions du premier degré, à coefficients numériques, formées au moyen de $q_1, q_2, \ldots q_s, \pi_2, \pi_3, \ldots \pi_l$.

Nous pouvons supposer l'une des quantités ω égale à la fonction $p - \pi_0$, qui a pour transformée $P - \Pi_0$: en prenant $\omega_1 = p - \pi_0$, nous aurons :

$$\Omega_1 = \varepsilon_1\omega_1 + \varepsilon_2\omega_2 + \cdots + \varepsilon_s\omega_s.$$

La fonction p est donc égale à la source π_0 du covariant $\Lambda\Psi'$, augmentée d'une quantité ω_1, dont la transformée s'exprime au moyen de s termes $(s < r)$.

De la même manière, la fonction ω_1 est égale à la source d'un covariant $\Lambda_1\Psi_1'$, augmentée d'une quantité, dont la transformée s'exprime au moyen de t termes $(t < s)$ *.

Par des réductions analogues, nous obtenons ce résultat : *la fonction* p,

* Λ_1 désigne une opération analogue à Λ, c'est-à-dire réductible à des opérations polaires, pour les variables $x', y', \ldots w', x, y, \ldots w$.

Ψ_1 est un covariant analogue à Ψ : il a pour source un semi-invariant de première espèce analogue à π_1 : le covariant Ψ_1' s'obtient en remplaçant dans Ψ_1 les variables $x, y, \ldots w$ par $x', y', \ldots w'$.



qui est quelconque, est une somme de sources de covariants analogues à $\Lambda\Psi'$; en d'autres termes, *tout covariant* [p], *de poids zéro à* n *séries de variables, est une somme de covariants* $\Lambda\Psi'$.

XII. D'après les résultats rappelés au paragraphe VI, le covariant Ψ est le produit d'une puissance de $\Sigma \pm x_1 y_2 \ldots w_n$, par un covariant Ψ_0 relatif à $n - 1$ séries de variables

$$\begin{array}{cccccc|c}
(x) & x_1 & x_2 & \ldots & x_n & & (1) \\
(y) & y_1 & y_2 & \ldots & y_n & & (2) \\
\vdots & . & . & . & . & & \\
(u) & u_1 & u_2 & \ldots & u_n & & (h) \\
\vdots & . & . & . & . & & \vdots \\
(v) & v_1 & v_2 & \ldots & v_n & & (n-1).
\end{array}$$

Le covariant Ψ_0 a pour expression symbolique une fonction entière de déterminants $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_{n-1}, \delta_n$ d'ordre $1, 2, \ldots n-1, n$. Les déterminants Δ_h, $(1 \overline{\overline{<}} h \overline{\overline{<}} n - 1)$ sont analogues à

$$\begin{vmatrix}
a_x & a_y & \ldots & a_u \\
b_x & b_y & \ldots & b_u \\
. & . & . & . \\
. & . & . & .
\end{vmatrix};$$

ils ont pour éléments des formes linéaires rapportées successivement à chacune des h premières séries de variables : $(x), (y) \ldots (u)$. Les déterminants δ_n, d'ordre n, sont formés des coefficients de n formes linéaires : ils sont analogues à

$$\begin{vmatrix}
a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\
b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\
. & . & . & . \\
l_1 & l_2 & \ldots & l_n
\end{vmatrix}.$$

Du reste, les différents déterminants Δ et δ ne doivent pas nécessairement se rapporter aux mêmes formes $a_x, b_x, \ldots$.

Nous désignerons les covariants Ψ_0 sous le nom de *covariants primaires*.

Ainsi, par exemple,

$$a_x^2 b_x \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^5 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^4$$

est l'expression symbolique d'un covariant primaire pour $n = 3$.

D'après la définition précédente, le covariant Ψ' est le produit du covariant primaire $\Psi_0(x'y' \dots v')$ par une puissance du covariant identique $\Sigma \pm x'_1 y'_2 \dots w'_n$. La fonction $\Lambda\Psi'$ est par suite égale à une puissance de $\Sigma \pm x_1 y_2 \dots w_n$ multipliée par une somme de polaires du covariant primaire $\Psi_0(x'y' \dots v')$. En conséquence, le dernier théorème que nous avons obtenu peut s'énoncer de la manière suivante : *Tout covariant* [p], *de poids zéro, à* n *séries de variables* (x) (y) ... (w), *est une somme de produits de puissances du covariant identique* (xy ... w) *et de polaires de covariants primaires, relatives aux variables* (x), (y), ... (w).

On déduit immédiatement de là, cette proposition plus générale mais moins précise : *Un covariant, de poids zéro, contenant* n *séries de variables* (x) (y) ... (w) *et d'autres séries analogues, est réductible à des puissances de* (xy ... w), *multipliées par des polaires de covariants indépendants des variables* w *.

Considérons maintenant l'expression symbolique d'un covariant de poids zéro : nous aurons pour cette expression symbolique, les mêmes réductions que pour le covariant lui-même. La loi de réduction n'est pas altérée, si l'on multiplie l'expression symbolique du covariant par un produit de déterminants symboliques, analogues à δ_n (c'est-à-dire, analogues à $\Sigma \pm a_1 b_2 \dots l_n$). En conséquence, les propriétés indiquées ci-dessus se vérifient encore pour les covariants qui ne sont pas de poids zéro.

* Cette proposition conduit immédiatement à ce théorème énoncé par M. Capelli : « Tous les covariants sont réductibles à des covariants identiques multipliés par des polaires de covariants à $n - 1$ séries de variables. » Le théorème de M. Capelli est établi dans un beau mémoire publié en 1882 (*Memorie della R. Acad. dei Lincei,* serie 3ª, vol. XII).

D'après cette remarque, notre dernier théorème conduit à cette proposition générale : *Tout covariant, à un nombre quelconque de séries de variables, est une somme de produits de covariants identiques, par des polaires de covariants primaires.*

Nous croyons utile de faire observer que les polaires, dont il s'agit dans l'énoncé, se rapportent directement aux variables et non pas à leurs combinaisons.

En terminant, nous indiquerons une conséquence intéressante de notre théorème de réduction pour les covariants $[p]$ de poids zéro, à n séries de variables $x, y, \ldots w$.

Le coefficient des plus hautes puissances de $x_1, y_2, z_3, \ldots w_n$, dans un covariant $[p]$, peut être considéré comme une quantité quelconque (§ IV): d'autre part, dans une polaire de covariant primaire, le coefficient analogue est une somme de coefficients de ce covariant primaire. Il résulte de là, que *toute fonction entière des coefficients de formes algébriques est une somme de coefficients de covariants primaires.*

Si l'on suppose $n = 2$, les covariants primaires sont les covariants à une seule série de variables x_1, x_2: on retrouve alors une propriété que nous avons établie dans une *Note sur les semi-invariants de formes binaires.* (Mémoires de la Société royale des sciences de Liége, 2me série, tome XV.)

ADDITION *.

Dans le dernier paragraphe, nous avons obtenu le covariant primaire Ψ_0, en divisant le covariant Ψ par une puissance de $(xyz\,..\,w)$: en conséquence, la source π_1 du covariant Ψ est aussi la source du covariant primaire Ψ_0 **.

Reprenons la formule (7′) :

$$\Psi = (\theta_1)\pi_1 + (\theta_2)\pi_2 + \cdots + (\theta_l)\pi_l;$$

nous supposerons que le covariant Ψ a la détermination la plus générale; les quantités (θ_1), (θ_2), ... (θ_l) sont fonctions des variables $x, y, \ldots w$; les multiplicateurs $\pi_2, \pi_3, \ldots \pi_l$ sont fonctions des coefficients de formes algébriques aux variables $x_1, x_2, \ldots x_n$; du reste, les multiplicateurs π sont réduits au plus petit nombre possible.

Nous avons établi (§ VIII) que « toute combinaison linéaire de $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_l$ a pour transformée une expression contenant nécessairement π_1 ». Cette propriété des multiplicateurs $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_l$ n'est pas altérée, quand le covariant Ψ a une détermination particulière. En effet, les propriétés des transformations linéaires dépendent, non pas des valeurs des quantités transformées, mais de leur mode de formation générique. Les considérations précédentes nous permettent d'énoncer ce théorème : *Si une fonction linéaire des coefficients d'un covariant primaire n'est pas nulle identiquement (d'après le mode de formation des covariants primaires), cette fonction linéaire a pour transformée une expression qui contient nécessairement la source* π_1.

* Cette addition a été motivée par de nouvelles recherches sur la théorie des formes à un nombre quelconque de séries de variables.

** La *source* est le coefficient des plus hautes puissances de $x_1, y_2, z_3, \ldots, w_n$.

Au moyen de ce théorème, nous démontrerons la proposition suivante :

Entre les coefficients des covariants primaires linéairement indépendants, il ne peut exister aucune relation du premier degré, qui ne résulte pas du mode de formation général des covariants primaires.

Considérons, en effet, des covariants primaires $\Psi_0^{(1)}$, $\Psi_0^{(2)}$, ... linéairement indépendants : contrairement à l'énoncé, supposons entre les coefficients une relation du premier degré, $U = 0$, qui ne résulte pas du mode de formation général des covariants primaires. La transformée V de la fonction U sera nécessairement nulle et, d'après ce qui précède, elle doit s'exprimer au moyen des sources des covariants primaires $\Psi_0^{(1)}, \Psi_0^{(2)}$, ... D'autre part, la relation $V = 0$ se partage en relations isobariques entre les coefficients des divers covariants ; l'une au moins de ces relations contiendra seulement, et au premier degré, les sources de quelques-uns des covariants primaires $\Psi_0^{(1)}$, $\Psi_0^{(2)}$, ... *. Ainsi, les covariants $\Psi_0^{(1)}$, $\Psi_0^{(2)}$, ... ne seraient pas linéairement indépendants, comme nous l'avons supposé.

Par suite, on ne peut pas admettre l'existence d'une relation linéaire $U = 0$: notre proposition est ainsi établie.

* Supposons que la source d'un covariant primaire Ψ_0 a pour poids : m_n, m_{n-1}, ... m_2, m_1, relativement aux indices n, $n-1$, ... 2, 1 : il n'existe aucun coefficient de Ψ_0 qui ait pour poids m_1, m_2, ... m_i, $m_{i+1} + e$ $(e > 0)$, relativement aux indices 1, 2, ... i, $\overline{i+1}$.

Soit M_1 le maximum des valeurs de m_1, correspondantes aux covariants $\Psi_0^{(1)}$, $\Psi_0^{(2)}$, ... ; soit M_2 la plus grande valeur de m_2, qui se trouve associée à $m_1 = M_1$; etc.

En considérant, dans l'équation $V = 0$, les termes de poids M_n, M_{n-1}, ... M_2, M_1, on obtiendra une relation linéaire entre les sources de certains covariants de la suite $\Psi_0^{(1)}$, $\Psi_0^{(2)}$, etc.

SUR
LA LOI DE FORMATION
DES
FONCTIONS INVARIANTES;

PAR

JACQUES DERUYTS,
CHARGÉ DE COURS A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

(Mémoire présenté à la Classe des sciences, dans la séance du 4 mai 1889.)

SUR

LA LOI DE FORMATION

DES

FONCTIONS INVARIANTES.

---

1. Dans un travail récent « Sur les transformations linéaires et la théorie des covariants » nous avons établi cette proposition : *Pour un système de formes à* n *variables, tout covariant, à un nombre quelconque de séries de* n *variables cogrédientes, est une somme de covariants identiques multipliés par des polaires de covariants primaires.*

Représentons par

$$(x),\quad (y),\quad (z)\quad \ldots\quad (t),\quad (u)\quad \ldots\quad (v),\quad (w),\qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

$n-1$ séries de variables cogrédientes *; les *covariants primaires* sont caractérisés par leur expression symbolique qui est fonction entière de déterminants $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_{n-1}, \delta_n$, d'ordres 1, 2, 3, ... $n-1$, n, définis comme il suit : Les déterminants Δ_i sont analogues à

$$\begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z & \cdots & \alpha_u \\ \beta_x & \beta_y & \beta_z & \cdots & \beta_u \\ \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z & \cdots & \gamma_u \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix};$$

ils ont pour éléments i formes linéaires rapportées successivement à chacune

* Les notations (x), (y), ... représentent les séries de variables $(x_1, x_2, \ldots x_n)$; $(y_1, y_2, \ldots y_n)$; ...



des i premières séries de variables de la suite (1). Les déterminants δ_n sont analogues à

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n \\ \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix};$$

ils ont pour éléments les coefficients de n formes linéaires.

Nous nous proposons actuellement d'établir une méthode pour former les covariants primaires. D'après le théorème rappelé ci-dessus, la recherche des covariants est ramenée à la recherche des covariants primaires. Le résultat que nous avons en vue donnera donc la loi de formation de tous les covariants à un nombre quelconque de séries de variables; il permettra aussi de former toutes les fonctions invariantes; on sait en effet que les divariants et les contrevariants sont des covariants (ou invariants), quand on considère les variables contragrédientes comme des coefficients de formes linéaires.

Pour atteindre notre but, nous aurons à faire usage de différentes propriétés, que nous établirons dans la première partie de ce travail.

I

2. Théorème. — *Un covariant* S, *aux* n — 1 *séries de variables* (x) (y)... (t) (u) ... (w), *est un covariant primaire, quand il n'est pas modifié par le changement de* $y_j, z_j, \dots u_j, \dots w_j$ *en* $y_j + \theta' x_j$, $z_j + \theta'' y_j$, ... $u_j + \theta^{(i-1)} t_j$, ... $w_j + \theta^{(n-2)} v_j$; ($\theta', \theta'', \dots \theta^{(i-1)}, \dots \theta^{(n-2)}$ sont des constantes et j a les valeurs 1, 2, 3, ... n).

Nous rappellerons d'abord qu'un covariant $S = S(x, y, \dots w)$ est complètement déterminé par le coefficient du terme contenant les plus hautes puissances de $x_1, y_2, z_3, \dots t_{i-1}, u_i, \dots v_{n-2}, w_{n-1}$ *; le coefficient dont il s'agit

* Nous représentons par (t) et (u) la $(i-1)^{\text{ième}}$ et la $i^{\text{ième}}$ série de variables, comprises dans la suite (x), (y), ... (w) : nous conserverons cette notation dans tout ce qui suit.

est ainsi la *source* du covariant S : nous le représenterons par S_0. Désignons par σ, σ_0, les expressions symboliques de S et de S_0 : l'expression σ est une fonction entière de formes linéaires

$$\left.\begin{matrix} h_x, & k_x, & \dots & l_x, \\ h_y, & k_y, & \dots & l_y, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_w, & k_w, & \dots & l_w, \end{matrix}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

et de déterminants δ_n d'ordre n, composés des coefficients de n formes de la suite h_x, k_x ... l_x.

Cela posé, on a d'après les conditions de notre énoncé :

$$x\frac{dS}{dy}=0, \quad y\frac{dS}{dz}=0, \quad \dots \quad t\frac{dS}{du}=0, \quad \dots \quad v\frac{dS}{dw}=0\,^{*}. \quad \dots \quad (3)$$

En considérant comme des variables les formes du tableau (2), nous pouvons remplacer les équations (3) par :

$$\left.\begin{matrix} h_x\dfrac{d\sigma}{dh_y}+k_x\dfrac{d\sigma}{dk_y}+\dots+l_x\dfrac{d\sigma}{dl_y}=0, \\ h_y\dfrac{d\sigma}{dh_z}+k_y\dfrac{d\sigma}{dk_z}+\dots+l_y\dfrac{d\sigma}{dl_z}=0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ h_t\dfrac{d\sigma}{dh_u}+k_t\dfrac{d\sigma}{dk_u}+\dots+l_t\dfrac{d\sigma}{dl_u}=0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ h_v\dfrac{d\sigma}{dh_w}+k_v\dfrac{d\sigma}{dk_w}+\dots+l_v\dfrac{d\sigma}{dl_w}=0. \end{matrix}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

Remplaçons dans ces équations les quantités

$$h_x, k_x, \dots l_x; \quad h_y, k_y, \dots l_y; \quad \dots \quad h_u, k_u, \dots l_u; \quad \dots; \quad h_w, k_w, \dots l_w,$$

* On a

$$x\frac{dS}{dy}=x_1\frac{dS}{dy_1}+x_2\frac{dS}{dy_2}+\dots+x_n\frac{dS}{dy_n};$$

les notations $y\frac{dS}{dz}$, ... $t\frac{dS}{du}$, etc., s'interprètent d'une manière analogue.

par

$$h_1, k_1, \ldots l_1; \quad h_2, k_2, \ldots l_2; \quad \ldots \quad h_i, k_i, \ldots l_i; \quad \ldots; \quad h_{n-1}, k_{n-1}, \ldots l_{n-1}.$$

D'après cette transformation, il faut substituer à σ l'expression symbolique σ_0 de la source S_0; les dérivées $\frac{d\sigma}{dh_y}, \ldots \frac{d\sigma}{dh_u}, \ldots \frac{d\sigma}{dh_w}; \frac{d\sigma}{dk_y} \ldots$ doivent être remplacées par

$$\frac{d\sigma_0}{dh_2} - \sum \frac{d\sigma_0}{d\delta_n}\frac{d\delta_n}{dh_2}, \ldots \frac{d\sigma_0}{dh_i} - \sum \frac{d\sigma_0}{d\delta_n}\frac{d\delta_n}{dh_i}, \ldots \frac{d\sigma_0}{dh_{n-1}} - \sum \frac{d\sigma_0}{d\delta_n}\frac{d\delta_n}{dh_{n-1}};$$

$$\frac{d\sigma_0}{dk_2} - \sum \frac{d\sigma_0}{d\delta_n}, \frac{d\delta_n}{dk_2}, \text{ etc. } \ldots\ldots:$$

dans ces expressions, la sommation doit s'étendre aux déterminants δ_n, d'ordre n, qui servent à représenter σ_0 (d'après la valeur σ indiquée ci-dessus).

En conséquence, les équations (4) conduisent aux formules

$$h_i \frac{d\sigma_0}{dh_{i+1}} + k_i \frac{d\sigma_0}{dk_{i+1}} + \cdots + l_i \frac{d\sigma_0}{dl_{i+1}} - \sum \frac{d\sigma_0}{d\delta_n}\left(h_i \frac{d\delta_n}{dh_{i+1}} + k_i \frac{d\delta_n}{dk_{i+1}} + \cdots + l_i \frac{d\delta_n}{dl_{i+1}}\right) = 0,$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots n - 2);$$

la deuxième partie du premier membre est identiquement nulle, d'après une propriété élémentaire des déterminants; on a donc :

$$\left.\begin{array}{c} h_i \frac{d\sigma_0}{dh_{i+1}} + k_i \frac{d\sigma_0}{dk_{i+1}} + \cdots + l_i \frac{d\sigma_0}{dl_{i+1}} = 0, \\ i = 1, 2, 3, \ldots, n - 2; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4')$$

d'autre part, l'équation (4′) a encore lieu pour $i = n - 1$, d'après l'expression du symbole σ.

Il résulte de là que σ_0 est une fonction entière de déterminants δ_i, d'ordre $i = 1, 2, 3, \ldots n$, analogues à

$$\begin{vmatrix} h_1 & h_2 & \ldots & h_i \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

et composés des i premiers coefficients de i formes linéaires h_x, k_x ...*.

* Voir notre travail *Sur la généralisation des semi-invariants* (§§ II et IX) : dans ce travail, les équations (4′) sont représentées par $(i + 1, i)S_0 = 0$.

D'après la définition des covariants primaires (§ I), l'expression symbolique σ_0 représente la source S_0 d'un covariant primaire. Par suite, S est un covariant primaire, ainsi que nous l'avons annoncé.

REMARQUE. — Comme nous l'avons fait antérieurement, nous désignerons sous le nom de semi-invariant de première espèce, une fonction analogue à S_0, exprimable symboliquement comme somme de produits de déterminants δ_i, $(i = 1, 2, \dots n)$. Les produits dont il s'agit contiennent $(\pi_i - \pi_{i+1})$ déterminants δ_i, si π_i est, pour l'indice i, le poids du semi-invariant de première espèce *; de plus, le covariant primaire correspondant contient les variables $u_1, u_2, \dots u_n$, au degré $\pi_i - \pi_n$. Ces propriétés sont établies dans le travail que nous avons cité ci-dessus : nous en ferons usage dans la suite.

3. Représentons par I une fonction invariante $I\left(\frac{dJ}{dx}, \frac{dJ}{dy}, \dots \frac{dJ}{dw}\right)$, contenant respectivement aux degrés $\alpha, \beta, \dots \gamma$ les dérivées $\frac{dJ}{dx_i}, \frac{dJ}{dy_i}, \dots \frac{dJ}{dw_i}$, $(i=1, 2, \dots n)$ d'une fonction invariante J, quelconque et indéterminée.

On pourra supposer que la fonction I contient en outre des quantités indépendantes de J. Nous démontrerons le théorème suivant :

On déduit de $I\left(\frac{dJ}{dx}, \frac{dJ}{dy}, \dots \frac{dJ}{dw}\right)$ *une fonction invariante, en remplaçant les produits de dérivées premières de* J *par les dérivées multiples correspondantes d'une fonction invariante* J_1.

Désignons par P les produits

$$P = \left(\frac{dJ}{dx_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{dJ}{dx_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{dJ}{dx_n}\right)^{\alpha_n} \left(\frac{dJ}{dy_1}\right)^{\beta_1} \cdots \left(\frac{dJ}{dy_n}\right)^{\beta_n} \cdots \left(\frac{dJ}{dw_1}\right)^{\gamma_1} \cdots \left(\frac{dJ}{dw_n}\right)^{\gamma_n},$$

en supposant

$$\Sigma\alpha_i = \alpha, \quad \Sigma\beta_i = \beta, \quad \dots \quad \Sigma\gamma_i = \gamma.$$

Représentons par [P] les dérivées multiples correspondantes de J_1, savoir :

$$[P] = \frac{d^{\alpha+\beta+\cdots+\gamma} J_1}{dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2} \dots dx_n^{\alpha_n} dy_1^{\beta_1} \dots dy_n^{\beta_n} \dots dw_1^{\gamma_1} \dots dw_n^{\gamma_n}}.$$

* On doit prendre $\pi_{n+1} = 0$.



On vérifie la propriété d'invariance de la fonction I, en faisant seulement usage des relations qui existent entre les quantités P et leurs *transformées* par une transformation linéaire des variables. Par suite, nous démontrerons le théorème énoncé, en établissant que les séries de quantités P et [P] sont cogrédientes. D'autre part, le mode de transformation linéaire des dérivées et de leurs produits est indépendant de la fonction soumise aux *dérivations*. Il nous suffira donc de vérifier que les quantités P et [P] sont cogrédientes pour une détermination particulière de J et de J_1; toutefois, il faudra qu'il n'existe, dans ce cas particulier, aucune relation linéaire entre les différentes quantités P ou [P]. Cette condition est réalisée, si l'on prend

$$J = a_x b_y \dots l_w, \quad J_1 = \frac{1}{\alpha!\, \beta! \dots \gamma!} a_x^\alpha b_y^\beta \dots l_w^\gamma,$$

a_x, b_y, ... l_w étant des formes linéaires. D'après ce choix des fonctions J, J_1, les quantités P et [P] sont cogrédientes des produits

$$p = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} b_1^{\beta_1} \dots b_n^{\beta_n} \dots l_1^{\gamma_1} \dots l_n^{\gamma_n} \;{}^{*}.$$

Par suite, les quantités P et [P] sont cogrédientes dans le cas général : c'est le résultat que nous voulions obtenir.

4. *Covariants primaires dérivés.* — Prenons pour J, un covariant quelconque aux séries de variables $(x)\,(y) \dots (w)$; nous représenterons par f une forme relative aux variables $x_1 x_2 \dots x_n$. Soient $r_1, r_2, \dots r_n$ des nombres entiers, positifs ou nuls, dont la somme est égale à l'ordre de la forme f. Soient m_1, m_2, ... m_{n-1} les degrés du covariant J, par rapport aux séries de variables $(x)\,(y) \dots (w)$. Nous supposerons

$$\left.\begin{array}{c} \mu_i = m_i - m_{i+1} - r_{i+1} \overline{\overline{>}}\, 0, \\ i = 1, 2, 3, \dots n-1 \end{array}\right\} {}^{**} \quad \dots\dots \quad (5)$$

* Les quantités P, [P] et p sont identiques; il en est de même de leurs transformées, par toute substitution linéaire des variables cogrédientes $(x)\,(y) \dots (w)$.

** On doit faire $m_n = 0$.



Cela posé, considérons la fonction

$$R(J) = \begin{vmatrix} \frac{df}{dx_1} & \frac{df}{dx_2} & \dots & \frac{df}{dx_n} \\ \frac{dJ}{dx_1} & \frac{dJ}{dx_2} & \dots & \frac{dJ}{dx_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dJ}{dw_1} & \frac{dJ}{dw_2} & \dots & \frac{dJ}{dw_n} \end{vmatrix}^{r_n} \times \Pi_{i=1}^{n-1} \begin{vmatrix} x\frac{df}{dx} & y\frac{df}{dx} & z\frac{df}{dx} & \dots & u\frac{df}{dx} \\ x\frac{dJ}{dx} & y\frac{dJ}{dx} & z\frac{dJ}{dx} & \dots & u\frac{dJ}{dx} \\ x\frac{dJ}{dy} & y\frac{dJ}{dy} & z\frac{dJ}{dy} & \dots & u\frac{dJ}{dy} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x\frac{dJ}{dt} & y\frac{dJ}{dt} & z\frac{dJ}{dt} & \dots & u\frac{dJ}{dt} \end{vmatrix}^{r_i} \cdot \begin{vmatrix} x\frac{dJ}{dx} & y\frac{dJ}{dx} & \dots & u\frac{dJ}{dx} \\ x\frac{dJ}{dy} & y\frac{dJ}{dy} & \dots & u\frac{dJ}{dy} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x\frac{dJ}{du} & y\frac{dJ}{du} & \dots & u\frac{dJ}{du} \end{vmatrix}^{\mu_i}.$$

Il est visible que $R(J)$ est un covariant. Nous représenterons par $[R(J)]$ la quantité obtenue en remplaçant, dans $R(J)$, les produits de dérivées de f et de J par les dérivées multiples correspondantes des mêmes fonctions; d'après le dernier théorème que nous avons établi, $[R(J)]$ est un covariant.

Remplaçons $y, z, \dots u, \dots w$ par $y + \theta' x, z + \theta'' y, \dots u + \theta^{(i-1)} t, \dots w + \theta^{(n-2)} v$; l'expression de $R(J)$ n'est pas modifiée, si l'on convient de regarder les produits de dérivées de f et de J comme des constantes. D'un autre côté, on vérifie au moyen des formules (5), que les dérivées de f et de J, contenues dans $[R(J)]$, sont indépendantes des variables $(y), (z), \dots (w)$.

D'après ces remarques, et d'après le mode de formation de $R[(J)]$, cette quantité n'est pas modifiée, quand on remplace $y, z, \dots w$ par $y + \theta' x$, $z + \theta'' y$, $\dots w + \theta^{(n-2)} v$. Suivant un théorème établi ci-dessus (§ 2), la quantité $[R(J)]$ est un covariant primaire : nous dirons que $[R(J)]$ est *un covariant dérivé* de la forme f et du covariant J.

La source $[R(J)]_0$ du covariant $[R(J)]$ s'obtient en remplaçant les produits de dérivées de J et de f, par les dérivées multiples correspondantes, dans la fonction

$$R_0(J) = \frac{1}{\mu_1 ! \, r_1 !} \Pi_{i=1}^{n-1} \left\{ \Sigma \pm \frac{dJ}{dx_1} \cdot \frac{dJ}{dy_2} \dots \frac{dJ}{du_i} \right\}^{\mu_i} \times \Pi_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \frac{df}{dx_1} & \frac{df}{dx_2} & \dots & \frac{df}{dx_i} \\ \frac{dJ}{dx_1} & \frac{dJ}{dx_2} & \dots & \frac{dJ}{dx_i} \\ \frac{dJ}{dy_1} & \frac{dJ}{dy_2} & \dots & \frac{dJ}{dy_i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dJ}{dt_1} & \frac{dJ}{dt_2} & \dots & \frac{dJ}{dt_i} \end{vmatrix}^{r_i} : \quad . \qquad (6)$$

il suffit d'observer que, dans le covariant [R(J)], les dérivées multiples de f et de J contiennent les variables (x) aux degrés r_1 et μ_1.

II

5. Désignons par ψ_0, l'expression symbolique d'un semi-invariant de première espèce Ψ_0 : soit p_i, le poids de ψ_0 pour l'indice i; ψ_0 est exprimable comme somme de produits de $p_i - p_{i+1}$ déterminants δ_i, d'ordre $i = 1, 2, 3, \ldots n$. (§ 2. — Remarque.)

Nous supposerons que ψ_0 contient *des* coefficients de la forme a_x^A, qui représente symboliquement la forme f d'ordre A. Soit G_n, la suite de ces coefficients, qui sont analogues à $a_1^{A_1} a_2^{A_2} \ldots a_n^{A_n}$, $(A_1 + A_2 + \cdots + A_n = A)$. Nous désignerons par G_{n-1}, la suite des éléments de G_n, dont le poids A_n pour l'indice n a la valeur maxima r_n. Considérons de même les suites G_{n-1}, $G_{n-2}, \ldots G_{j+1}, G_j, \ldots G_1$, définies par cette condition que G_j est formé des éléments de G_{j+1}, dont le poids A_{j+1}, pour l'indice $j+1$, a la valeur maxima r_{j+1}. Le groupe G_1 contient un seul élément $a_1^{r_1} a_2^{r_2} a_3^{r_3} \ldots a_j^{r_j} \ldots a_n^{r_n}$: nous dirons que cet élément est le *coefficient principal* de a_x^A dans ψ_0.

Soit Γ_0, la fonction par laquelle le coefficient principal $a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_n^{r_n}$ se trouve multiplié dans l'expression symbolique ψ_0 : la fonction Γ_0 représentera symboliquement un semi-invariant de première espèce. D'autre part, le multiplicateur de $a_1^{r} \ldots a_{i-1}^{r_{i-1}} a_i^{r_i} a_{i+2}^{r_{i+2}} \ldots a_n^{r_n}$, dans ψ_0, est un semi-invariant de formes binaires aux variables x_i, x_{i+1} : il a les poids $p_i - r_i$, p_{i+1}, pour les indices i, $i+1$; on a donc :

$$p_i - p_{i+1} - r_i \overline{>} 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Le covariant Γ, qui a pour source Γ_0, représente symboliquement un covariant primaire C, du degré $t - 1$ par rapport à f, si le semi-invariant Ψ_0 est du degré t, par rapport à cette même forme f.

Le poids de Γ_0, pour l'indice i, a la valeur $p_i - r_i$; d'après la remarque indiquée au paragraphe 2, le covariant primaire C contient les variables $u_1, u_2, \ldots u_n$ au degré

$$m_i = p_i - p_n - r_i - r_n.$$

Les nombres $\mu_i = m_i - m_{i+1} - r_{i+1}$ sont égaux à $p_i - p_{i+1} - r_i$ et d'après la formule (7), ils sont positifs ou nuls.

Les formules (5) sont donc vérifiées, si l'on fait $J = C$, et nous pouvons appliquer au covariant C les résultats obtenus pour le covariant J (§ 4).

Ainsi, $[R(C)]$ est un covariant primaire et d'après la formule (6), la source $[R(C)]_0$ est représentée symboliquement par

$$\rho_0 = \frac{A!}{\mu_1! \, r_1!} \Pi_{i=1}^{n-1} \left\{ \Sigma \pm \frac{d}{dx_1} \frac{d}{dy_2} \cdots \frac{d}{du_i} \right\}^{\mu_i} \Pi_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_i \\ \frac{d}{dx_1} & \frac{d}{dx_2} & \dots & \frac{d}{dx_i} \\ \frac{d}{dy_1} & \frac{d}{dy_2} & \dots & \frac{d}{dy_i} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d}{dt_1} & \frac{d}{dt_2} & \dots & \frac{d}{dt_i} \end{vmatrix}^{r_i} \Gamma.$$

Dans cette expression ρ_0, le coefficient principal de a_x^A est $a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_n^{r_n}$, si ce produit est multiplié par une quantité V différente de zéro. Cette condition se trouve réalisée, ainsi que nous allons le démontrer.

On a

$$V = \pm \frac{A!}{\mu_1! \, r_1!} \Omega \Gamma_1,$$

en prenant

$$\Omega = \Pi_{i=1}^{n-1} \left\{ \Sigma \pm \frac{d}{dx_1} \frac{d}{dx_2} \cdots \frac{d}{du_i} \right\}^{r_{i+1} + \mu_i}.$$

En développant les déterminants, on trouve

$$\Omega = \Sigma \eta \frac{d^{m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}}}{dx_1^{e_1} dx_2^{e_2} \dots dx_{n-1}^{e_{n-1}} dy_1^{f_1} dy_2^{f_2} \dots dy_{n-1}^{f_{n-1}} \dots dw_1^{q_1} dw_2^{q_2} \dots dw_{n-1}^{q_{n-1}}} \quad (8)$$

dans cette formule, η désigne un facteur numérique; la sommation s'étend aux systèmes de nombres $e, f, \dots q$ déterminés par les relations

$$e_1 + f_1 + \dots q_1 = m_1, \quad e_2 + f_2 + \dots + q_2 = m_2, \; \dots, \; e_{n-1} + f_{n-1} + \dots + q_{n-1} = m_{n-1},$$

$$e_1 + e_2 + \dots e_{n-1} = m_1, \quad f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} = m_2, \; \dots, \; q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1} = m_{n-1}.$$

D'après l'expression symbolique des covariants primaires d'ordres m_1, m_2, ... m_{n-1}, par rapport aux variables $x, y \dots w$, on a $\Omega\Gamma = \Gamma_0 . \Omega U$, si l'on représente par U le produit

$$x_1^{m_1 - m_2}(\Sigma \pm x_1 y_2)^{m_2 - m_3} \dots (\Sigma \pm x_1 y_2 \dots u_i)^{m_i - m_{i+1}} \dots (\Sigma \pm x_1 \dots w_{n-1})^{m_{n-1}}.$$

On a

$$U = \Sigma \eta x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_{n-1}^{e_{n-1}} y_1^{f_1} y_2^{f_2} \dots y_{n-1}^{f_{n-1}} \dots w_1^{q_1} w_2^{q_2} \dots w_{n-1}^{q_{n-1}}, \quad \dots \dots \quad (9)$$

en donnant aux lettres η, e, f, ... q, les mêmes significations que dans la formule (8).

Au moyen des formules (8) et (9), on obtient :

$$\Omega U = \Sigma \eta^2 . e_1! \, e_2! \dots e_{n-1}! \, f_1! \dots f_{n-1}! \, . \, . \, q_1! \dots q_{n-1}!.$$

La quantité ΩU a donc une valeur $\pm \zeta \frac{\mu_1! . r_1!}{A!}$ différente de zéro.

D'après les relations, $V = \pm \frac{A!}{\mu_1! r_1!} \Omega\Gamma$, $\Omega\Gamma = \Gamma_0 \Omega U$, le produit $a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_n^{r_n}$ se trouve multiplié par $\zeta\Gamma_0$ dans le semi-invariant ρ_0. Le résultat, que nous venons d'obtenir, peut s'exprimer comme il suit :

Dans les semi-invariants de première espèce ψ_0 et $\frac{1}{\zeta}\rho_0$, le coefficient principal de a_x^A est le même et il se trouve multiplié par la même quantité Γ_0.

6. Prenons $\psi_0 - \frac{1}{\zeta}\rho_0 = \psi_0'$; l'expression ψ_0' représente symboliquement un semi-invariant de première espèce : elle contient, comme coefficient principal de a_x^A, un produit $a_1^{r_{11}} a_2^{r_{12}} \dots a_n^{r_{1n}}$ différent de $a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_n^{r_n}$.

Si l'on a

$$r_{1n} = r_n, \; r_{1n-1} = r_{n-1}, \dots r_{1, n-j} = r_{n-j},$$

on a nécessairement $r_{1, n-j-1} < r_{n-j-1}$.

D'après ce qui précède, on peut écrire : $\psi_0' - \rho_0' = \psi_0''$; dans cette formule, ρ_0' est l'expression d'un certain semi-invariant analogue à $\frac{1}{\zeta}\rho_0$; ψ_0'' est le symbole d'un semi-invariant de première espèce. En continuant le système de notations, on aura

$$\psi_0'' - \rho_0'' = \psi_0''', \quad \psi_0''' - \rho_0''' = \psi_0^{\text{IV}}, \text{ etc.}$$



Dans le cas général, nous écrirons

$$\psi_0^{(s-1)} - \rho_0^{(s-1)} = \psi_0^{(s)},$$

et nous aurons par les réductions successives :

$$\psi_0 = \frac{1}{\zeta}\rho_0 + \rho_0' + \rho_0'' + \cdots + \rho_0^{(s-1)} + \psi_0^{(s)} \,{}^{*} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Soit

$$a_1^{r_{s1}} a_2^{r_{s2}} \ldots a_n^{r_{sn}},$$

le coefficient principal de a_x^λ dans la fonction $\psi_0^{(s)}$; les nombres $r_{s2}, r_{s3}, \ldots r_{sn}$ jouissent des propriétés suivantes :

1° on a

$$r_{sn} \geqq r_{s+1,n},$$

2° on ne peut pas avoir

$$r_{s+1,2} = r_{s,2}, \quad r_{s+1,3} = r_{s,3}, \ldots r_{s+1,n} = r_{s,n},$$

3° en supposant seulement :

$$r_{s+1,n} = r_{sn}, \quad r_{s+1,n-1} = r_{s,n-1}, \ldots r_{s+1,n-j} = r_{s,n-j}, \ (j < n-2),$$

on a

$$r_{s+1,n-j-1} < r_{s,n-j-1}.$$

Ces propriétés résultent d'une remarque faite ci-dessus, pour les nombres r_i, r_{1i} : elles nous permettent d'établir que, *pour une valeur suffisamment grande de* s, *on a* $\psi_0^{(s)} = 0$.

Dans la supposition inverse, r_{sn} décroît jusqu'à zéro ou bien reste constant et différent de zéro, à partir d'une certaine valeur de s $(s = s')$: d'après la troisième des propriétés indiquées ci-dessus, le nombre $r_{s,n-1}$, pour $s > s'$,

* Cette réduction est analogue à celle que nous avons indiquée, pour les semi-covariants de formes binaires : *Développements sur la théorie des formes binaires* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1887).



décroît jusqu'à zéro, ou bien conserve une valeur constante, et différente de zéro, à partir d'une certaine limite *. On obtiendra de proche en proche, la même conclusion pour $r_{s,n-2}$, $r_{s\,n-3}$, ... r_{s2}. Nous aurons ainsi, pour une certaine valeur de s :

$$r_{s+1,2} = r_{s,2}, \quad r_{s+1,3} = r_{s,3}, \ldots r_{s+1,n} = r_{sn};$$

ces égalités ne peuvent pas avoir lieu, d'après la deuxième propriété des nombres r_{si} indiquée plus haut. Par suite, le résultat que nous avions en vue se trouve établi.

Il résulte ainsi de la formule (10), que *la fonction* ψ_0 *est une somme de quantités analogues à* ρ_0.

Les expressions ψ_0, ρ_0 représentent symboliquement les semi-invariants de première espèce Ψ_0 et $[R(C)]_0$. D'autre part, Ψ_0 et $[R(C)]_0$ sont les sources de covariants primaires Ψ et $[R(C)]$; le covariant primaire Ψ est tout à fait quelconque : il est du degré t par rapport à la forme f; $[R(C)]$ est un covariant primaire dérivé de la forme f, et d'un covariant primaire C du degré $t - 1$ par rapport à la forme f.

En conséquence, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Tout covariant primaire Ψ, *de degré* t *pour une forme* f, *est une somme de covariants primaires dérivés de la forme* f *et des covariants primaires* C, *du degré* t — 1 *par rapport à* f.

Par des applications successives de ce théorème, on obtiendra tous les covariants primaires d'un système quelconque de formes à n variables **. C'est le résultat que nous avons annoncé au début de ce travail.

7. En terminant, nous donnerons un exemple des transformations indiquées aux paragraphes 5 et 6.

* Dans les deux cas, r_{sn} et $r_{s,n-1}$ ont des valeurs constantes, quand s dépasse une certaine limite.

** La forme f est le seul covariant primaire, du premier degré par rapport à f, et indépendant des coefficients d'autres formes.

Prenons, dans le cas de formes ternaires :

$$\psi_0 = a_1 (b_1 c_2)(a_1 b_2 d_3)(b_1 d_2 e_3).$$

Le coefficient principal de a_x^2 est $a_3 a_1$ $(r_1 = 1,\ r_2 = 0,\ r_3 = 1)$; ce coefficient principal est multiplié par le semi-invariant de première espèce

$$\Gamma_0 = (b_1 c_2)(b_1 d_2)(b_1 d_2 e_3),$$

lequel est la source du covariant primaire

$$\Gamma = \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ d_x & d_y \end{vmatrix} (b_1 d_2 e_3).$$

Les degrés du covariant Γ, par rapport à (x), (y), sont $m_1 = 2$, $m_2 = 2$; on a, [formule (5)] :

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 1;$$

puis :

$$\rho_0 = 2a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \frac{d}{dx_1} & \frac{d}{dx_2} & \frac{d}{dx_3} \\ \frac{d}{dy_1} & \frac{d}{dy_2} & \frac{d}{dy_3} \end{vmatrix} \left(\frac{d^2\Gamma}{dx_1 dy_2} - \frac{d^2\Gamma}{dx_2 dy_1} \right)$$

$$= 12 a_1 (b_1 c_2)(a_1 b_2 d_3)(b_1 d_2 e_3) + 12 a_1 (b_1 d_2)(a_1 b_2 c_3)(b_1 d_2 e_3).$$

On obtient

$$\psi_0' = \psi_0 - \frac{1}{24} \rho_0 = -\frac{1}{2} a_1 (a_1 b_2)(b_1 d_2 c_3)(b_1 d_2 e_3);$$

le coefficient principal de a_x^2 dans la fonction ψ_0' est $a_1 a_2$, d'où

$$r_{11} = 1, \quad r_{12} = 1, \quad r_{13} = 0.$$

En prenant

$$\Gamma' = \frac{1}{2} b_x (b_1 d_2 c_3)(b_1 d_2 e_3),$$

on trouve pour le semi-invariant,

$$\rho_0' = -a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \dfrac{d\Gamma'}{dx_1} & \dfrac{d\Gamma'}{dx_2} \end{vmatrix} :$$

$$\rho_0' = -\frac{1}{2} a_1 (a_1 b_2)(b_1 d_2 c_3)(b_1 d_2 e_3).$$

On a donc

$$\psi_0' = \rho_0',$$

puis

$$\psi_0 = \frac{\rho_0}{24} + \rho_0'.$$

Ainsi, le semi-invariant représenté symboliquement par ψ_0 est ramené aux sources de deux covariants primaires dérivés de covariants primaires.


PRINCETON UNIV
Princeton University Library
32101 073242685

